

## محاضرة 1

### الديناميكا

#### الكتيانيكا

دراسة الحركة بمفرقة السبب  
(١) المقذورات

(٢) الحركة البهتزازية

(٣) الدفع والتصادم

(٤) الحركة الدورانية

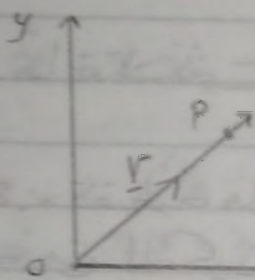
(٥) القوى الوهمية

#### الكتيانيكا

دراسة الحركة دون معرفة السبب

(١) الباب الذول

الباب الذول : "حركة النقطة المادية"



$$\underline{OP} = x \underline{i} + y \underline{j}$$

إذا كانت P نقطة ثابتة

$$\underline{OP} = x(t) \underline{i} + y(t) \underline{j}$$

إذا كانت P نقطة متغيرة حيث

$\underline{OP}$  متجه الموضع

$$\therefore \underline{r} = x(t) \underline{i} + y(t) \underline{j}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}(t) \underline{i} + \dot{y}(t) \underline{j}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

حيث

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}(t) \underline{i} + \ddot{y}(t) \underline{j}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

حيث

الذواحه : اشتقاق سرعة اشتقاق عجلة  
الذواحه : اشتقاق سرعة تكامل عجلة

وبالتالي : العجلة لها صورتين

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$

(١) العجلة دالة في الزمن



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{العجلة دالة في الإزاحة}$$

**مثال 1:-** تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم وكانت المسافة  $x$  تتغير ب  
العلاقة  $x = t^3 - 12t + 8$ . عيّن المسافة والزمن والعجلة عندما  
تتدنى السرعة.

الحل

$$x = t^3 - 12t + 8$$

$$\dot{x} = 3t^2 - 12$$

لمعرفة السرعة نجري الاشتقاق

عندما تتدنى السرعة يكون الزمن = ؟

$$0 = 3t^2 - 12 \Rightarrow 12 = 3t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \Rightarrow t = 2$$

لمعرفة العجلة نجري الاشتقاق

عندما تتدنى السرعة يكون الزمن = 2 والعجلة = ؟

$$\ddot{x} = 6t = 12$$

عندما تتدنى السرعة يكون الزمن = 2 والمسافة = ؟

$$x = (2)^3 - 12(2) + 8 = -8$$

**مثال 2:-** تقطع مادية تتحرك بالعلاقة  $\ddot{x} = 9 - 3t^2$  فإذا بدأ الجسم

الحركة من السكون عند الوضع  $x = -30$  فأوجد

(1) متى يعود الجسم إلى حالة السكون مرة أخرى.

(2) عيّن العجلة والمسافة عند  $t = 4$ .

$$\ddot{x} = 9 - 3t^2 \Rightarrow 0$$

الحل:-  
الجسم بدأ الحركة من السكون  $x = -30$ ,  $x_0 = 0$ ,  $t = 0$   
وهذه هي الشروط الابتدائية

بإجراء التكامل على (1)

$$\dot{x} = 9t - t^3 + C_1$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$0 = 9(0) - (0)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\therefore \dot{x} = 9t - t^3 \Rightarrow (2)$$

يعود الجسم مرة أخرى عندما يكون  $\dot{x} = 0$  ،  $t = ?$

$$0 = 9t - t^3 \Rightarrow 0 = t(9 - t^2)$$

بالتعويض في 2

$$\Rightarrow t = 0 \text{ or } 9 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3 \Rightarrow t = 3$$



لحرق المسافة عند  $t = 4$  نعوض جزي التكامل على  $\frac{2}{3}$

$$x = \frac{9}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4 + C_2$$

نعوض في الشرط الابتدائي  $x = -30$ ,  $t = 0$

$$-30 = \frac{9}{2} (0)^2 - \frac{1}{4} (0)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -30$$

$$\therefore x = \frac{9}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4 - 30 \Rightarrow 3$$

بتعويض  $t = 4$

$$\therefore x = \frac{9}{2} (4)^2 - \frac{1}{4} (4)^4 - 30 = -22$$

لحرق البجلة عند  $t = 4$  نعوض في 1

$$\ddot{x} = 9 - 3t^2 = 9 - 3(4)^2 = -39$$

مثال 3 :- تتغير العلاقة بين السرعة والمسافة لجسيم متحرك على محور  $x$  بالصورة  $x = \mu \dot{x}^{1/2} - \lambda$  وبدأ الحركة بسرعة  $\dot{x}_0$  و  $\mu, \lambda$  ثوابت أوجد الزمن اللازم حتى تصل السرعة إلى ضعف سرعتها الابتدائية.

ما هي العلاقة بين البجلة والسرعة

الحل :- المطلوب هو الزمن عند ما يكون  $\dot{x} = 2 \dot{x}_0$

المطلوب علاقته بين السرعة والزمن

$$\textcircled{1} \Leftarrow x = \mu \dot{x}^{1/2} - \lambda \Rightarrow x + \lambda = \mu \sqrt{\dot{x}} \Rightarrow \sqrt{\dot{x}} = \frac{x + \lambda}{\mu}$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{(x + \lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow \textcircled{2}$$

من 2 لكي أوجد الزمن

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{(x + \lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow dt = \mu^2 dx / (x + \lambda)^2$$

$$\therefore dt = \mu^2 (x + \lambda)^{-2} dx$$

$$t = -\mu^2 (x + \lambda)^{-1} + C_1$$

بإجراء التكامل

$$t = 0, x = 0$$

بالتعويض في الشرط الابتدائية :-

لأن الجسم تحرك من السكون

$$\therefore 0 = -\mu^2 (0 + \lambda)^{-1} + C_1 \Rightarrow 0 = -\mu^2 \lambda^{-1} + C_1 \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\therefore t = -\mu^2 (x + \lambda)^{-1} + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow \textcircled{3}$$

بالتعويض في 3



$$t = -\mu^2 (\mu\sqrt{x} - \lambda + \lambda)^{-1} + \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\therefore t = -\mu^2 (\mu\sqrt{x})^{-1} + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow t = \frac{-\mu}{\sqrt{x}} + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow \text{G}$$

ولكن نعرف  $\ddot{x}$  نفوض في ؟ بالشروط الابتدائية  
 $\dot{x} = \dot{x}_0, x = 0, t = 0$   
 $\dot{x}_0 = \frac{(0 + \lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$   
 $\dot{x} = 2\dot{x}_0 = 2\lambda^2/\mu^2 \Rightarrow \text{D}$

ومن المعطى بالمقوض في (4) في (5)

$$\therefore t = -\mu/\sqrt{2}\lambda/\mu + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow t = \frac{-\mu^2}{\sqrt{2}\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\therefore t = \frac{\mu^2}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \#$$

العلاقة بين الجلة والسرعة  
 تفاضل معادله  $\ddot{x} = \frac{(x + \lambda)^2}{\mu^2}$

$$\ddot{x} = \frac{(x + \lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow \mu^2 \ddot{x} = (x + \lambda)^2$$

$$\therefore \mu \sqrt{x} = x + \lambda$$

$$\mu \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ddot{x} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = 2\dot{x}^{3/2}/\mu$$

بأخذ الجذر الطرفين  
 بالتفاضل

مثال 4: إذا كان  $\ddot{x} = 2\dot{x} + 3$  ،  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 3 \text{ m/sec}$  ، فاشتت  $x, t$   
 أن  $\ddot{x} = -\frac{3}{2}(3e^{2t} - 1)$  ثم أوجد العلاقة بين  $\ddot{x} = 2\dot{x} + 3 \Rightarrow \text{D}$

الحل :-  
 الشروط الابتدائية  
 ب إيراد التكامل !  
 $\dot{x}_0 = 0, t = 0, x_0 = 3$   
 $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 2\dot{x} + 3$   
 $\therefore dt = (2\dot{x} + 3)^{-1} d\dot{x}$

$$\therefore dt = \frac{1}{2} \cdot 2(2\dot{x} + 3)^{-1} d\dot{x}$$

$$t = \frac{1}{2} \ln(2\dot{x} + 3) + C_1$$

بالتكامل بالتعويض بالشروط الابتدائية  
 $t = 0, \dot{x} = 0$

$$\therefore 0 = \frac{1}{2} \ln(0 + 3) \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 9 = C_1$$



$$t = \frac{1}{2} \ln(2\dot{x}+3) + \frac{1}{2} \ln 9$$

$$2t = \ln(2\dot{x}+3) + \ln 9 \Rightarrow 2t = \ln \frac{2\dot{x}+3}{9}$$

$$e^{2t} = \frac{2\dot{x}+3}{9} \Rightarrow 9e^{2t} = 2\dot{x}+3 \Rightarrow 2\dot{x} = 9e^{2t} - 3$$

$$\Rightarrow 2\dot{x} = 3(3e^{2t} - 1) \Rightarrow \dot{x} = \frac{3}{2}(3e^{2t} - 1) \quad \text{②} \quad \#$$

العلاقة بين المسافة والزمن تكامل 2

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}(3e^{2t} - 1) \Rightarrow dx = \frac{3}{2}(3e^{2t} - 1) dt$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} e^{2t} - t \right) + C_3 \Rightarrow x = \frac{9}{4} e^{2t} - \frac{3}{2} t + C_3$$

بالتعويض في الشرط الابتدائية

$$\therefore 0 = \frac{9}{4} e^{2(0)} - \frac{3}{2}(0) + C_3 \Rightarrow C_3 = -\frac{9}{4}$$

$$\therefore x = \frac{9}{4} e^{2t} - \frac{3}{2} t - \frac{9}{4}$$

مثال 5

تتحرك نقطة مادية من السكون بعجلة ثابتة ترتبط بالزمن بالعلاقة  $\ddot{x} = \alpha - \beta t^2$

حيث  $\alpha$  و  $\beta$  ثوابت. أثبت أن النقطة المادية تكسب أقصى سرعة

لها بعد زمن قدره  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  وأنها تكون قد قطعت مسافة قدرها  $\frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\beta}$

ثم أوجد العلاقة بين هذه المسافة وأقصى سرعة.

الحل: الجسم يتحرك من السكون  $x_0 = 0, t = 0, \dot{x} = 0$

$$\ddot{x} = \alpha - \beta t^2 \Rightarrow \text{①}$$

$$\dot{x} = \alpha t - \frac{\beta}{3} t^3 + C_1$$

بالتعويض في الشرط الابتدائية

$$0 = \alpha(0) - \frac{\beta}{3}(0)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \alpha t - \frac{\beta}{3} t^3 \Rightarrow \text{②}$$

الجسم يكون له سرعته أكبر ما يمكن عندما يكون  $\dot{x} = 0$

$$0 = \alpha - \beta t^2 \Rightarrow \beta t^2 = \alpha \Rightarrow t^2 = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \#$$

لعرفة المسافة تكامل 2

$$\Rightarrow \dot{x} = \alpha t - \frac{\beta}{3} t^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{\beta}{12} t^4 + C_2$$

بالتعويض في الشرط الابتدائية

$$0 = \frac{\alpha}{2}(0)^2 - \frac{\beta}{12}(0)^4 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{\beta}{12} (t)^4 \Rightarrow \text{③}$$



3 نعوض في

$$x = \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{1}{12} B t^4 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{B}} \right)^2 - \frac{B}{12} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{B}} \right)^4$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha^2}{2B} - \frac{\alpha^2}{12B} \Rightarrow x = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{B} \quad \#$$

العلاقة بين هذه المسافة وأقصى سرعة  
عندما يصل الجسم إلى أقصى سرعة يكون

$$\dot{x} = \alpha t - \frac{1}{3} B t^3$$

$$x_{max} = \alpha \left( \frac{\alpha}{B} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} B \left( \frac{\alpha}{B} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{B}}$$

$$\Rightarrow x_{max}^2 = \frac{4}{9} \frac{\alpha^3}{B} \Rightarrow (4)$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{B} \Rightarrow B = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{x} \Rightarrow (5)$$

$$x_{max}^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{\alpha^3}{\frac{5}{12} \cdot \frac{\alpha^2}{x}} = \frac{4 \cdot 12^4 \alpha^3 x}{38 \cdot 5 \alpha^2} = \frac{16 \alpha x}{15}$$

$$\Rightarrow x_{max}^2 = \frac{16}{15} \alpha x$$

مثال 7 يتحرك جسم في خط مستقيم  $0 < x$  تحت تأثير عجلة تتجه دائما نحو ومقدارها  $\lambda(x + a^4 x^{-3})$  حيث  $\lambda$  ثابت، فإذا علم أن الجسم قد بدأ الحركة من السكون من نقطة تبعد مسافة  $a$  عن  $0$  فأثبت أنه يصل إلى  $0$  في زمن قدره  $\frac{\pi}{4} a^{-1/2}$

الجسم بدأ الحركة من السكون من نقطة  $a$  من تقضيه  $a$

$$t=0, \quad x=a, \quad \dot{x}_0=0$$

الجلة تتجه نحو

الجلة دالة في المسافة

$$a = v \frac{dv}{dx} = -\lambda (x + a^4 x^{-3})$$

$$\Rightarrow \int v dv = -\lambda \int (x + a^4 x^{-3}) dx$$

$$\frac{1}{2} v^2 = -\lambda \left( \frac{1}{2} x^2 + a^4 \frac{x^{-2}}{2} \right) + C_1 \quad \text{بالمكامل}$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (0)^2 = -\lambda \left( \frac{1}{2} (a)^2 - \frac{a^4}{2} (0)^{-2} \right) + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$



$$\therefore \frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\lambda \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{a^4 x^{-2}}{2} \right)$$

بضرب في 2 والتعويض عن  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$$\dot{x}^2 = -\lambda (x^2 - a^4 x^{-2})$$

بضرب في -1

$$\therefore \dot{x}^2 = +\lambda \left( \frac{-x^4 + a^4}{x^2} \right) \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{a^4 - x^4}{x^2}}$$

الموجب مرفوض لأن الجسم يتجه نحو 0

$$\therefore \dot{x} = -\sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{a^4 - x^4}{x^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = -(\lambda)^{\frac{1}{2}} (a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}} x^{-1}$$

$$\therefore dt = -(\lambda)^{-\frac{1}{2}} (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}} x dx$$

$$\therefore +(\lambda)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{x}{(a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}}} dx$$

بالتكامل

$$+\sqrt{\lambda} t = -\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) + C_1$$

$$\therefore +2\sqrt{\lambda} t = -\sin^{-1} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) + C_1$$

بالتعويض بـ الشروط الابتدائية  $t=0, x=a$

$$0 = \sin^{-1}(1) + C_1 \Rightarrow C_1 = -\sin^{-1}(1)$$

$$\therefore \sin(0) = 1 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -2\sqrt{\lambda} t = \sin^{-1} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{\pi}{2}$$

$$-2\sqrt{\lambda} t + \frac{\pi}{2} = \sin^{-1} \left( \frac{x^2}{a^2} \right)$$

بتأثير sin الطرفين

$$\therefore \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\lambda} t \right) = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \cos(2\sqrt{\lambda} t) = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\therefore x^2 = a^2 \cos(2\sqrt{\lambda} t)$$

يصل الجسم إلى 0 عند ما يكون  $x=0$

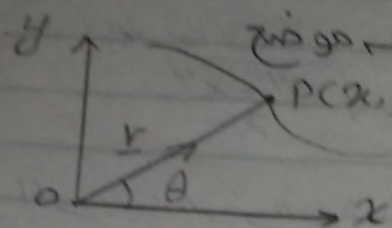
$$\therefore 0 = a^2 \cos(2\sqrt{\lambda} t) \Rightarrow \cos(2\sqrt{\lambda} t) = 0$$

$$2\sqrt{\lambda} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad \#$$



## محاضرة 2

### الحركة المستوية:-



موقع موضع:  $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

السرعة:  $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

التسارع:  $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$$

سؤال: يتحرك جسم في مستوى تحت تأثير الجلبة

$$\vec{a} = (12t^2 - 3t)\vec{i} + (6t - 2)\vec{j}$$

وعد متجهي السرعة والموضع عند أي لحظة إذا علم أن الجسم بدأ الحركة من النقطة (1, -2) وهر كيتا السرعة (3, -2)

كل:- الجسم بدأ الحركة من النقطة (1, -2) والسرعة (3, -2)  
 $t=0, x_0=1, y_0=-2, \dot{x}_0=-2, \dot{y}_0=3$

$$\ddot{x} = 12t^2 - 3t \Rightarrow ①$$

$$\ddot{y} = 6t - 2 \Rightarrow ②$$

بالتكامل 261

$$\dot{x} = \frac{12}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + C_1$$

$$\dot{y} = \frac{6}{2}t^2 - 2t + C_2$$

$$\dot{x} = 4t^3 - \frac{3}{2}t^2 + C_1$$

$$\dot{y} = 3t^2 - 2t + C_2$$

بالتعويض بـ الشروط الابتدائية

$$-2 = C_1$$

$$3 = C_2$$

$$\dot{x} = 4t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2 \Rightarrow ③$$

$$\dot{y} = 3t^2 - 2t + 3 \Rightarrow ④$$

$$\vec{v} = (4t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2)\vec{i} + (3t^2 - 2t + 3)\vec{j}$$

بالتكامل 463

$$x = t^4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 - 2t + C_3, \quad y = t^3 - t^2 + 3t + C_4$$

$$x = t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t + C_3, \quad y = t^3 - t^2 + 3t + C_4$$

بالتعويض بـ الشروط الابتدائية

$$1 = 0 - 0 - 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 1, \quad -2 = C_4$$

$$\therefore x = t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t + 1, \quad y = t^3 - t^2 - 3t - 2$$



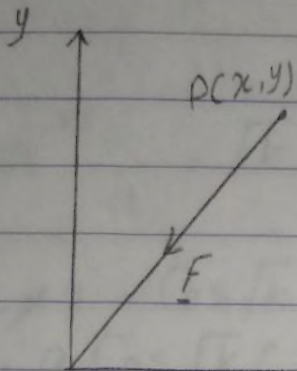
## تابع لحافرة ؟

Subject : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

**مثال 2** يتحرك جسيم في مستوى معين تحت تأثير قوة تعمل دائماً في اتجاه نقطة ثابتة وتتناسب القوة مع بعد الجسيم عن هذه النقطة أو مع معادله مسار الجسيم إذا علم أنه قدذف من النقطة التي إحداثياتها  $(a, b)$  بسرعة ابتدائية مركبة  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$

$$x_0 = a, y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = b, t = 0$$



$$\underline{F} \propto \underline{r}$$

$$\underline{F} = -\lambda \underline{r}$$

$\lambda = \text{Constant}$

من نيوتن الثاني

$$\therefore m \underline{a} = -\lambda \underline{r}$$

$$\underline{a} = \frac{-\lambda}{m} \underline{r} \Rightarrow \underline{a} = -k \underline{r} \quad \therefore k = \frac{\lambda}{m}$$

$$\underline{a} = \ddot{x} \underline{i} + \ddot{y} \underline{j}, \quad \underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j}$$

$$\therefore \ddot{x} \underline{i} + \ddot{y} \underline{j} = -k (x \underline{i} + y \underline{j})$$

$$\therefore \ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{y} = -ky$$

الحيلة دالة في البزاحة

$$\therefore x \frac{dx}{dx} = -kx$$

$$y \frac{dy}{dy} = -ky$$

بالتكامل

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} kx^2 + C_1$$

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 = -\frac{1}{2} ky^2 + C_2$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$0 = -\frac{1}{2} ka^2 + C_1$$

$$\frac{1}{2} b^2 = -\frac{1}{2} kb^2 + C_2$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2} ka^2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} b^2$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} ka^2$$

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 = -\frac{1}{2} ky^2 + \frac{1}{2} b^2$$

نضرب في 2

$$\dot{x}^2 = ka^2 - kx^2$$

$$\dot{y}^2 = b^2 - ky^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{k} (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\dot{y} = (b^2 - ky^2)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{k} (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dt} = (b^2 - ky^2)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{k} \left( \frac{b^2}{k} - y^2 \right)^{1/2}$$



Subject : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

$$dt\sqrt{k} = \frac{-dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$dt\sqrt{k} = \frac{-dy}{(\frac{b^2}{k} - y^2)^{1/2}}$$

$$\cos^{-1} \frac{x}{a} = \sqrt{k}t + C_3$$

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{k}y}{b} = \sqrt{k}t + C_4$$

بالتقويض في الشرط الابتدائي

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1} \frac{x}{a} = \sqrt{k}t$$

$$\cos^{-1} \frac{y\sqrt{k}}{b} = \sqrt{k}t + \frac{\pi}{2}$$

بتأثير دالتا طرفين

$$\therefore x/a = \cos \sqrt{k}t$$

$$\frac{y\sqrt{k}}{b} = \cos(\sqrt{k}t + \frac{\pi}{2})$$

$$x = a \cos \sqrt{k}t$$

$$\frac{y\sqrt{k}}{b} = -\sin \sqrt{k}t$$

$$\therefore x = a \cos \sqrt{k}t$$

$$y\sqrt{k} = -b \sin \sqrt{k}t$$

$$x = a \cos \sqrt{k}t$$

$$y = \frac{-b}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}t$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \cos \sqrt{k}t$$

$$\sin \sqrt{k}t = \frac{y\sqrt{k}}{b}$$

بالتربيع والجمع نرى التالي من  $t$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 k}{b^2} = \cos^2 \sqrt{k}t + \sin^2 \sqrt{k}t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{C^2} = 1 \Rightarrow C = \frac{b}{\sqrt{k}}$$

وهي معادلة قطع ناقص



## مخاطبة في

Subject :

Date :

في إمتحان الإحداثيات القطبية وما الفرق بينها والإحداثيات الديكارتية

الفرق :- (1) منحنيات الوحدة ثابت الطول والارتفاع

(2) أشكالها صفر

(3) أبعادها  $r$  ،  $\theta$

القطبية :- (1) منحنيات الوحدة ثابت الطول متغير الارتفاع

(2) أشكالها لليمساوي صفر

(3) أبعادها  $\hat{r}$  ،  $\hat{\theta}$

الرسم :- نحدد الإحداثيات  $x$  ،  $y$  و خط مستقيم يمر من نقطة التحويل ويميل على محور  $x$  بزاوية  $\theta$  تقابل في الاتجاه العاكس لإتجاه عقارب الساعة ، ثم نحدد منحنيات الوحدة  $\hat{r}$  ،  $\hat{\theta}$  بحيث يكونوا في وضع القائم ويكون كل منهما على إمتداد  $r$  ،  $\theta$  على الترتيب



$$\underline{r} = r \hat{r} \Rightarrow 1$$

$$x = r \cos \theta , y = r \sin \theta$$

$$\underline{r} = r \cos \theta + r \sin \theta = r (\cos \theta + \sin \theta) \quad 2$$

بالمقارنة !

$$\underline{\hat{r}} = \cos \theta + \sin \theta \Rightarrow 3$$

بالمثل  $\theta$

$$\underline{\theta} = \theta \hat{\theta} \Rightarrow x_{\theta} = \theta \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\theta \sin \theta$$

$$y_{\theta} = \theta \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) = \theta \cos \theta$$

$$\underline{\theta} = -\theta \sin \theta + \theta \cos \theta = \theta (-\sin \theta + \cos \theta) \quad 5$$

بالمقارنة 5 ، 4

$$\underline{\hat{\theta}} = -\sin \theta + \cos \theta$$



Subject :

Date :

$$\hat{r} = \cos \theta + \sin \theta \quad , \quad \hat{\theta} = -\sin \theta + \cos \theta$$

التفاضل بالنسبة لـ  $\theta$ 

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin \theta + \cos \theta = \hat{\theta}$$

وهذا يتوافق مع القاعدة "أي متجه ثابت الطول لا يشتقله"

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos \theta - \sin \theta = -\hat{r}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta} \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\hat{r} \dot{\theta}$$

$$\underline{r} = r \hat{r}$$

$$\underline{\dot{r}} = r \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

بالتفاضل

$$\underline{\dot{r}} = r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \hat{r} \Rightarrow \underline{v} = \langle \dot{r} \quad r \dot{\theta} \rangle$$

$$\underline{\ddot{r}} = r \ddot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt} + r \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt} + \ddot{\theta} \hat{\theta} \frac{dr}{dt} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{r} \frac{d\dot{r}}{dt}$$

بالتفاضل

$$\underline{\ddot{r}} = -r \dot{\theta}^2 \hat{r} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \hat{r}$$

$$\underline{\ddot{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{a} = \langle (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \quad (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \rangle$$

الصورة القطرية

الصورة المستعرضة

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} [r^2 \dot{\theta}]$$



مثال: إذا كانت سرعة نقطة مادية على طول نصف القطر من نقطة ثابتة والمودع عليه هما على الترتيب  $\lambda r$  و  $\mu \theta$  أو صمد مادل المسار وأثبت أن

$$a_{\theta} = \mu \theta \left( \lambda + \frac{\mu}{r} \right)$$

$$a_r = \lambda^2 r - \mu^2 \frac{\theta^2}{r}$$

$$v_r = \dot{r} = \lambda r$$

①

$$v_{\theta} = r\dot{\theta} = \mu \theta$$

$$v_{\theta} = r\dot{\theta} = \mu \theta \quad ②$$

بقسمة المعادلتين

$$\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} = \frac{\lambda r}{\mu \theta} \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{r}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda r}{\mu \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{d\theta}{\theta}$$

بالتكامل

$$\therefore -r^{-1} = \frac{\lambda}{\mu} \ln \theta + C_1$$

وهذه هي معادلة المسار

$$\therefore \underline{a} = \langle \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \rangle$$

بقانون

$$\therefore a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow ③$$

$$\dot{r} = \lambda r \Rightarrow \ddot{r} = \lambda \dot{r} \Rightarrow 4$$

$$\therefore \ddot{r} = \lambda^2 r \Rightarrow 5$$

بإستقار 2 إلى 5  
بالتعويض من 4 إلى 5

$$a_r = \lambda^2 r - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow 6$$

$$a_r = \lambda^2 r - \mu \theta^2 \cdot \frac{\mu}{r}$$

$$a_r = \lambda^2 r - \mu \theta \cdot \frac{\mu \theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2 \theta^2}{r}$$

بالتعويض 5 إلى 6  
بالتعويض 6 إلى 7

#

$$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow 8$$

$$\mu \theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow r\ddot{\theta} + \ddot{\theta}r = \mu \theta$$

$$\therefore r\ddot{\theta} = \mu \theta - \ddot{\theta}r \Rightarrow 7$$

قانون  
بإستقار 7 إلى 8

$$a_{\theta} = \mu \theta - \ddot{\theta}r + 2\dot{r}\dot{\theta} = \mu \theta + \dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow a_{\theta} = \dot{\theta} \times (\mu + \dot{r})$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mu \theta}{r}$$

من 2

$$a_{\theta} = \frac{\mu \theta}{r} (\mu + \dot{r})$$

$$a_{\theta} = \frac{\mu \theta}{r} (\mu + \lambda r)$$

$$\dot{r} = \lambda r \quad \text{من 1}$$

$$\therefore a_{\theta} = \mu \theta \left( \frac{\mu}{r} + \lambda \right)$$



**واجب** يتحرك نقطة مادية في مسند وهاذا كانت مركبات العجلة لها  
 $\frac{b}{r_1} < \sin \theta$  ,  $\frac{2b}{r_1} \cos \theta < a$

على الترتيب أثبت أن

$$(r^2 \dot{\theta})^2 = A - 2b \cos \theta$$

وإذا كانت  $r = a$  عند  $\theta = 0$  فأثبت أن

$$r^2 = a^2 + n^2 \ell^2$$

$$na = \sqrt{A}$$

حيث  $n, A$  ثوابت

**المقدمات** - قبل دراسة المقدمات لابد من معرفة قوانين

نيوتن - **قانونه الأول** - يظل الجسم على حالته من حيث السكون أو الحركة ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حالته

**قانونه الثاني** - القوة المؤثرة على الجسم تتناسب مع كمية الحركة

$$\frac{d}{dt} (m \underline{v}) \propto \underline{F} \Rightarrow m \underline{a} + \frac{dm}{dt} \underline{v} \propto \underline{F}$$

الكلية ثابتة  $\Leftarrow$  إستقاراً = مفر

$$\therefore m \underline{a} \propto \underline{F} \Rightarrow m \underline{a} = k \underline{F}$$

$$k = 1$$

تنطبق الوحدات بحيث يكون

$$\therefore \underline{F} = m \underline{a}$$

**قانونه الثالث** - لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه

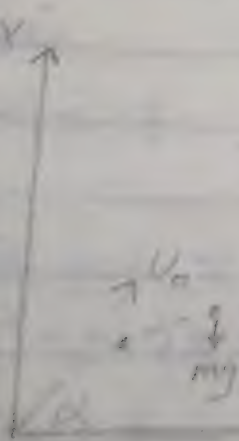
**ما هو المقندف** - هو جسم يتحرك تحت تأثير وزنه فقط في مستوى رأسي مع إهمال الوسط (مقاومة الوسط)

من خلال تعريف المقندف يكون المقندف تحت تأثير قوة وزنه فقط

من خلال قانون نيوتن الثاني يتبع أن

$$\underline{F} = m \underline{a} = \langle 0, -mg \rangle$$

$$\underline{F} = m \underline{a} = m \langle 0, -mg \rangle$$





$$\sum F_x = mg = m \ddot{x} \quad \sum F_y = -mg$$

$$\therefore m \ddot{x} = 0$$

$$\therefore m \ddot{y} = -mg$$

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{و} \quad \ddot{y} = -g$$

بالتكامل بافتراض الزمن  $t = 0$

$$\dot{x} = C_1$$

$$\dot{y} = -gt + C_2$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$x = U_0 \cos \alpha$$

$$U_0 \sin \alpha = -g(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = U_0 \sin \alpha$$

$$\therefore x = U_0 \cos \alpha \quad \text{③}$$

$$\dot{y} = -gt + U_0 \sin \alpha \quad \text{④}$$

بالتكامل بالنسبة للزمن

$$x = U_0 t \cos \alpha + C_3 \quad , \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0 t \sin \alpha + C_4$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$0 = U_0(0) \cos \alpha + C_3$$

$$0 = -\frac{1}{2}g(0)^2 + U_0(0) \sin \alpha + C_4$$

$$\therefore C_3 = 0$$

$$\therefore C_4 = 0$$

$$\therefore x = U_0 t \cos \alpha \quad \text{⑤}$$

$$y = U_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{⑥}$$

$$t = x / U_0 \cos \alpha \quad \text{⑦}$$

من ⑤ يتبع أن

بالتعويض في ⑥

$$\therefore y = U_0 \cdot \frac{x}{U_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\therefore y = x \tan \alpha - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{وهذه معادلة المسار}$$

ملحوظة: - دائما معادلة المسار تكون علاقة بين  $x, y$  في الإحداثيات الديكارتية و  $r, \theta$  في الإحداثيات القطبية

$$Z = \tan \alpha \quad , \quad k = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{U_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{للتبسيط}$$

$$\therefore y = xZ - kx^2$$



الاستنتاج زمن أقصى ارتفاع :-

عند أقصى ارتفاع  $y = 0$   $t = t_1$

$$y = U_0 \sin \alpha - gt \Rightarrow 0 = U_0 \sin \alpha - gt_1$$

$$\Rightarrow gt_1 = U_0 \sin \alpha \Rightarrow t_1 = \frac{U_0 \sin \alpha}{g}$$

الاستنتاج أقصى ارتفاع

يكون  $t = t_1$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0 t \sin \alpha$$

$$y_{\max} = -\frac{1}{2}g \left( \frac{U_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} \right) + U_0 \cdot \frac{U_0 \sin \alpha}{g} \cdot \sin \alpha$$

$$y_{\max} = -\frac{U_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{U_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{U_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

الاستنتاج زمن الطيران :-

عند ما يكون  $t = T$  يكون  $y = 0$

$$y = U_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = U_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow 0 = T(U_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gT) \Rightarrow$$

$$T = 0 \text{ OR } U_0 \sin \alpha = \frac{1}{2}gT \Rightarrow T = \frac{2U_0 \sin \alpha}{g} = 2t_1$$

= زمن الطيران = ضعف زمن الوصول لأقصى ارتفاع

الاستنتاج المدى

عند ما يكون  $x = R \Rightarrow y = 0$   $t = T$

$$\therefore x = U_0 t \cos \alpha \Rightarrow R = U_0 \cdot \frac{2U_0 \sin \alpha}{g} \cdot \cos \alpha$$

$$\therefore R = \frac{U_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

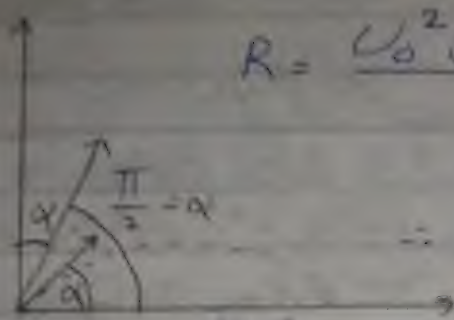
ملحوظية :- عند ما يكون

$$R = R_{\max} \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$R_{\max} = \frac{U_0^2}{g}, \text{ because } U_0 \text{ و } g \text{ Constant}$$



السؤال الثاني: هل يمكن أن يكون هناك اتجاهين للقذف يعطيان نفس المدى؟ نعم



$$R = \frac{U_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$U_0$  و  $g$  ثوابت

$R$  تعتمد على  $\alpha$

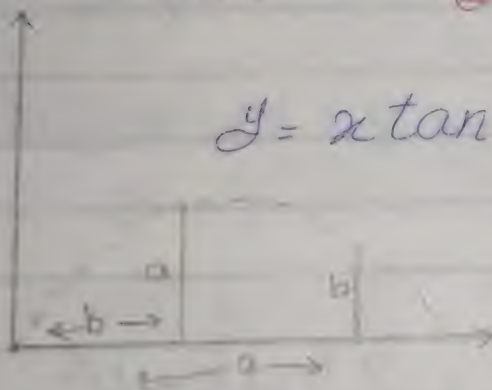
$$\therefore R = \frac{U_0^2}{g} \cdot \sin(2(\frac{\pi}{2} - \alpha))$$

$$\therefore R = \frac{U_0^2}{g} \cdot \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{U_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

مثال: إذا قذف كرة بسرعة تكفي لأن تجولها بالكاد تمر فوق حائطين الأول إرتفاعه  $a$  ويتبعد عن نقطة القذف مسافة  $b$  و الثاني إرتفاعه  $b$  ويتبعد عن نقطة القذف مسافة  $a$  أثبت أن

$$\textcircled{1} R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

زادوية القذف أكبر من  $\tan^{-1} 3$  الطلب



$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha}$$

النقطة  $a$  و  $b$  تقع على المسار

$$\therefore a = b \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{b^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$b = a \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{a^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \textcircled{2}$$

بضرب  $\textcircled{1}$  في  $a$  و  $\textcircled{2}$  في  $b$  - والمجموع

$$a^2 - b^2 = \cancel{ab} - \frac{1}{2} g \frac{ab^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} g \frac{a^2 b}{U_0^2 \cos^2 \alpha}$$



$$= \frac{a^3 - b^3}{2U_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{2U_0^2 \cos^3 \alpha}$$

$$= \frac{9}{2U_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{a^2 - b^2}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab(a-b)}$$

$$= \frac{9}{2U_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (3) \text{ من خلال قانون التبسيط}$$

بضرب !  $a^3$  ،  $b^3$  والجمع

$$= a^3 - b^3 = a^2 b \tan \alpha - ab^2 \tan \alpha$$

$$= ab(\tan \alpha)(a-b)$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{a^3 - b^3}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{ab(a-b)}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \Rightarrow (4) \text{ من خلال قانون التبسيط}$$

$$\therefore R = \frac{U_0^2 \sin^2 \alpha}{9} = \frac{Z}{K}$$

$$\therefore R = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{ab}{ab}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 1 \Rightarrow (5)$$

$$\therefore (a^2 - b)^2 > 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab$$

يقسم  $ab$  على الطرفين

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} > 2 \Rightarrow (6)$$



بالمتغيرات  $x, y, z$

$$\therefore \tan \alpha > 3$$

$$\tan^{-1} 3 < \alpha$$

أي زاوية القدر أكبر من 3

من خلال قانون التفاضل

حل آخر

$$y = xZ - kx^2$$

$$\therefore a = Zb - kb^2 \quad (1)$$

$$\therefore b = Za - ka^2 \quad (2)$$

وهي حلول حل معادلتين في متجهين

$$\therefore Z = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}$$

$$, k = \frac{a+b}{ab}$$

ومن خلال قانون التفاضل

$$\therefore R = \frac{Z}{k} = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$



## مسألة 2

يعبر كجسيم في مستوى تحت تأثير قوة طارئة عمودية على المحور  $x$  وتعاذل  $m\lambda y$  حيث  $m$  هي كتلة الجسم ،  $\lambda$  ثابت موجب فإذا علم أن الجسيم قد قذف من النقطة  $(0, b)$  بالسرعة  $b\sqrt{\lambda}$  في اتجاه



بوازي محور  $x$  . أوجد معادلة المسار  
الحل :-  $(x, y) = (a, b)$  ،  $(\dot{x}, \dot{y}) = (b\sqrt{\lambda}, 0)$

$$\underline{F} = m\lambda y \underline{j}$$

من قانون نيوتن الثاني

$$\underline{a} = (\ddot{x} \underline{i} + \ddot{y} \underline{j}) = \lambda y \underline{j}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = \lambda y$$

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = 0$$

العجلة دالة في  $y$  الزاوية

$$\dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy} = \lambda y$$

بالتكامل

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = C_1 \Rightarrow \dot{x}^2 = C_1 \Rightarrow \dot{x} = C_1 \quad , \quad \frac{1}{2} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \lambda y^2 + C_2$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية

$$0 = \frac{1}{2} \lambda b^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2} \lambda b^2$$

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \lambda y^2 - \frac{1}{2} \lambda b^2$$

بالتكامل

$$\dot{y} = \sqrt{\lambda (y^2 - b^2)}$$

$$\frac{dy}{(y^2 - b^2)^{1/2}} = dt \sqrt{\lambda}$$

$$x = t b \sqrt{\lambda} + C_3$$

$$t \sqrt{\lambda} = C_0 h^{-1} \frac{y}{b} + C_4$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية

$$0 = 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$0 = C_0 h^{-1} (1) + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$x = t b \sqrt{\lambda}$$

$$t \sqrt{\lambda} = C_0 h^{-1} \frac{y}{b} \Rightarrow y = \frac{b}{C_0 h^{-1}} t \sqrt{\lambda} \Rightarrow y = \frac{x}{b}$$

$$t = \frac{x}{b \sqrt{\lambda}} \Rightarrow \text{ث}$$

بالتعويض في 8 في 7

$$\frac{x}{b \sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{\lambda} = C_0 h^{-1} \frac{y}{b} = \frac{x}{b}$$



مثال 4: يتحرك جسم في مستوى تحت تأثير الجاذبية  $(a = \lambda b, 2\lambda y)$  فإذا علم أن  $b$  بدأ من السكون من النقطة  $(0, b)$  فأثبت أنه عندما يكون

$$36x = \pi^2 b \quad \text{فإن} \quad y = \frac{b}{2}$$

$$t=0 \quad (x, y) = (0, b) \quad (\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$$

$$\underline{a} = (\ddot{x} \underline{i} + \ddot{y} \underline{j}) = (\lambda b \underline{i} - 2\lambda y \underline{j})$$

$$\ddot{x} = \lambda b$$

$$\ddot{y} = -2\lambda y$$

$$\ddot{x} = \lambda b$$

$$\ddot{y} = -2\lambda y$$

المعادلة دالة في التفاضل

بالتكامل بالنسبة لـ  $x$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \lambda b x + C_1$$

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 = -\lambda y^2 + C_2$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$0 = -\lambda b^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = \lambda b^2$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \lambda b x$$

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 = -\lambda y^2 + \lambda b^2$$

$$\dot{x}^2 = 2\lambda b x$$

$$\dot{y}^2 = 2\lambda (b^2 - y^2)$$

$$\dot{x} = \sqrt{2\lambda b} x^{1/2}$$

$$\dot{y} = \sqrt{2\lambda} (b^2 - y^2)^{1/2}$$

بالتكامل

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\lambda b} x^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2\lambda} (b^2 - y^2)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{x^{1/2}} = dt \sqrt{2\lambda b}$$

$$\frac{dy}{(b^2 - y^2)^{1/2}} = dt \sqrt{2\lambda}$$

$$2\sqrt{x} = t \sqrt{2\lambda b} + C_3$$

$$\sin^{-1} \frac{y}{b} = t \sqrt{2\lambda} + C_4$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$0 = 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\sin^{-1} \frac{b}{b} = 0 \sqrt{2\lambda} + C_4 \Rightarrow C_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$2\sqrt{x} = t \sqrt{2\lambda b}$$

$$\sin^{-1} \frac{y}{b} = t \sqrt{2\lambda} + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$t = 2 \left( \frac{x}{2\lambda b} \right)^{1/2} \quad (2)$$

بالتعويض في (1) في (2) واستخدام المعطيات

$$\sin^{-1} \frac{b}{2b} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \cdot \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{2\lambda} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} = 2 \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi = 12 \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} + 3\pi$$

$$\therefore -2\pi = 12 \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} \Rightarrow -\pi = 6 \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} \Rightarrow \pi^2 = 36 \frac{x}{b} \Rightarrow b\pi^2 = 36x$$



(المسألة)

المسألة هي إيجاد المسافة بين نقطتين



$$\tan \beta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \tan \beta \quad (1)$$

المسافة بين نقطتين هي المسافة بين نقطتين

$$y = x \tan \alpha + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2 \alpha}$$

المسافة بين نقطتين

$$x \tan \beta = x \tan \alpha + \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

$$x \tan \beta - x \tan \alpha + \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = 0$$

$$x \left[ \tan \beta - \tan \alpha + \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} x \right] = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad \tan \beta - \tan \alpha = - \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} x$$

$$\tan \beta - \tan \alpha = - \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} x$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} x \Rightarrow 3$$

$$x/g = \cos^2 \beta \Rightarrow x = g \cos^2 \beta \Rightarrow 4)$$

المسافة

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{g}{2 U_0^2 \cos^2 \alpha} \cos^2 \beta$$

المسافة بين نقطتين

$$g = \frac{2 (\tan \alpha - \tan \beta) \cdot U_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \sec \beta [2 \tan \alpha \cos^2 \alpha - 2 \tan \beta \cos^2 \alpha]$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \sec \beta \left[ 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \cos^2 \alpha \right]$$



$$\begin{aligned}
 S &= \frac{U_0^2}{g} \sec^2 \beta \left[ \frac{\sin 2\alpha \cos \beta - 2 \sin \beta \cos^2 \alpha}{\cos \beta} \right] \\
 &= \frac{U_0^2}{g} \sec^2 \beta \left[ \sin 2\alpha \cos \beta - 2 \sin \beta \left( \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \right) \right] \\
 &= \frac{U_0^2}{g} \sec^2 \beta \left[ \sin 2\alpha \cos \beta - \sin \beta \cos 2\alpha - \sin \beta \right] \\
 S &= \frac{U_0^2}{g} \sec^2 \beta \left[ \sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta \right] \rightarrow \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

نلاحظ أن  $\beta$  معطى و  $U_0$  معطى و ثابت  
الذي يتحكم في  $S$  هو  $\alpha$

$$S_{\max} \xrightarrow{\text{لحد}} \sin(2\alpha - \beta) = 1 \Rightarrow 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{U_0^2}{g} \sec^2 \beta \left[ 1 - \sin \beta \right]$$

ملحوظة عند وضع أقصى مدى مائل فإنه إتجاه المسار يقسم  
الزاوية بين الرأسى والمستوى المائل بالتساوى

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{U_0^2}{g} \cdot \left[ \frac{1 - \sin \beta}{\cos^2 \beta} \right]$$

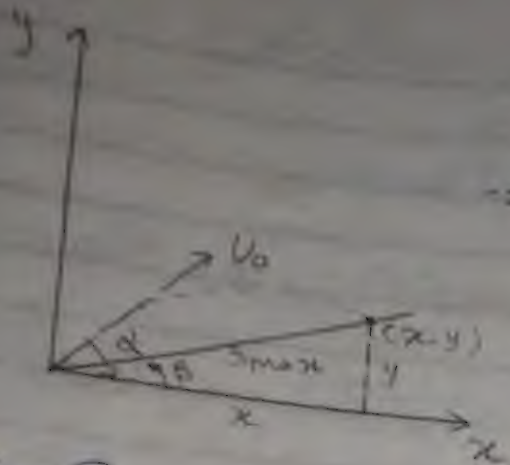
$$\Rightarrow = \frac{U_0^2}{g} \cdot \left[ \frac{1 - \sin \beta}{1 - \sin^2 \beta} \right]$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \left[ \frac{1 - \sin \beta}{(1 - \sin \beta)(1 + \sin \beta)} \right]$$

$$S_{\max} = \frac{U_0^2}{g} \left[ \frac{1}{1 + \sin \beta} \right]$$



القطع المقلق -



$$S_{max} = \frac{U_0^2}{g} \left( \frac{1}{1 + \sin \beta} \right)$$

$$S_{max} = \frac{U_0^2}{2g} \left( \frac{2}{1 + \sin \beta} \right)$$

بوضع  $\lambda = \frac{U_0^2}{2g}$  من المثل

$$x = S_{max} \cos \beta \quad (2)$$

$$y = S_{max} \sin \beta \quad (3)$$

$$S_{max} = \frac{2\lambda}{1 + \sin \beta}$$

(1)

$$x = \frac{2\lambda \cos \beta}{1 + \sin \beta}$$

$$x^2 = \frac{4\lambda^2 \cos^2 \beta}{(1 + \sin \beta)^2} = \frac{4\lambda^2 (1 - \sin^2 \beta)}{(1 + \sin \beta)^2} = \frac{4\lambda^2 (1 - \sin \beta)(1 + \sin \beta)}{(1 + \sin \beta)^2}$$

$$x^2 = \frac{4\lambda^2 (1 - \sin \beta)}{(1 + \sin \beta)}$$

$$x^2 = \frac{4\lambda^2 (1 - \sin \beta - \sin \beta + \sin \beta)}{(1 + \sin \beta)}$$

$$x^2 = \frac{4\lambda^2 (1 + \sin \beta - 2\sin \beta)}{(1 + \sin \beta)}$$

$$x^2 = 4\lambda^2 \left[ \frac{1 + \sin \beta}{1 + \sin \beta} - \frac{2\sin \beta}{1 + \sin \beta} \right] = 4\lambda^2 \left[ 1 - \frac{2\sin \beta}{1 + \sin \beta} \right]$$

$$x^2 = 4\lambda \left[ \lambda - \frac{2\lambda \sin \beta}{1 + \sin \beta} \right] = 4\lambda [\lambda - y]$$

$$\therefore x^2 = 4\lambda [\lambda - y]$$

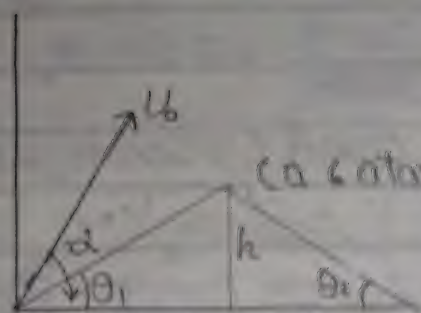
معادله قطع مكافئ

بالتعويض ج ع في ا  
يتربيع المعادلة

بوضع  $\sin \beta - \sin \beta$  في البسط



عالم المستويات لها قاعدة أفقية مشتركة ويصلان عليها بزاوية  $\theta_1$  و  $\theta_2$  في الارتفاع أطلقنا قزيعته من قاعدة أحد المستويين تحت بالكاد القبة المشتركة للمستويين ووصلت إلى ارتفاع المستوي الآخر أثبت أن زاوية القذف هي  $\tan^{-1}(\tan \theta_1 + \tan \theta_2)$



$$\tan \theta_1 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \tan \theta_1$$

$$(a \tan \theta_1) \cot \theta_2 = \frac{L}{h} \Rightarrow h = h \cot \theta_2$$

$$L = a \tan \theta_1 \cot \theta_2$$

$$(a + a \tan \theta_1 \cot \theta_2 < 0)$$

$(a \tan \theta_1)$  تقع على المسار

$$y = xZ - kx^2 \Rightarrow Z = \tan \alpha, k = \frac{g}{2u_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\tan \theta_1 = xZ - x^2 k \Rightarrow \tan \theta_1 = x - ak \quad (1)$$

$(a + a \tan \theta_1 \cot \theta_2 < 0)$  تقع على المسار

$$0 = Z(a + a \tan \theta_1 \cot \theta_2) - (a + a \tan \theta_1 \cot \theta_2)^2 k$$

$$0 = xZ(1 + \tan \theta_1 \cot \theta_2) - x^2 k(1 + \tan \theta_1 \cot \theta_2)^2$$

$$= Z + Z \tan \theta_1 \cot \theta_2 - ak - ak(2 \tan \theta_1 \cot \theta_2 + \tan^2 \theta_1 \cot^2 \theta_2)$$

نطرح هذه المعادلتين من (1) - (2)

$$\tan \theta_1 = -Z \tan \theta_1 \cot \theta_2 + ak(2 \tan \theta_1 \cot \theta_2 + \tan^2 \theta_1 \cot^2 \theta_2)$$

$$\tan \theta_1 + Z \tan \theta_1 \cot \theta_2 - ak(2 \tan \theta_1 \cot \theta_2 + \tan^2 \theta_1 \cot^2 \theta_2) = 0$$

$$\tan \theta_1 [1 + Z \cot \theta_2 - ak(2 \cot \theta_2 + \tan \theta_1 \cot^2 \theta_2)] = 0$$

$\tan \theta_1 = 0$  القوس  $OR$  مرفوض

$$1 + Z \cot \theta_2 - ak(2 \cot \theta_2 + \tan \theta_1 \cot^2 \theta_2) = 0$$

$$-ak = \tan \theta_1 - x$$

من !  
بالتعويض

$$0 = 1 + Z \cot \theta_2 + (\tan \theta_1 - Z)(2 \cot \theta_2 + \tan \theta_1 \cot^2 \theta_2) = 0$$

$$0 = 1 + Z \cot \theta_2 + (\tan \theta_1 - Z)(2 + \tan \theta_1 \cot \theta_2) \cot \theta_2$$

بضرب المعادلة في  $\tan \theta_2$



$$0 = \tan \theta_2 + Z + (\tan \theta_1 - Z)(2 + \tan \theta_1 \cot \theta_2)$$

$$0 = \tan \theta_2 + \tan \theta_1 (2 + \tan \theta_1 \cot \theta_2) - Z(2 + \tan \theta_1 \cot \theta_2) + Z$$

$$0 = Z(1 - 2 - \tan \theta_1 \cot \theta_2) + \tan \theta_2 + \tan \theta_1 (2 + \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2})$$

$$= \tan \theta_2 + \tan \theta_1 (2 \tan \theta_2 + \tan \theta_1)$$

$$= \tan \theta_2 + \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} (2 \tan \theta_2 + \tan \theta_1)$$

$$= \frac{\tan^2 \theta_2 + \tan \theta_1 (2 \tan \theta_2 + \tan \theta_1)}{\tan \theta_2}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta_2 + 2 \tan \theta_1 \tan \theta_2 + \tan^2 \theta_1}{\tan \theta_2}$$

$$= \frac{(\tan \theta_2 + \tan \theta_1)^2}{\tan \theta_2}$$

$$Z(1 + \tan \theta_1 \cdot \frac{1}{\tan \theta_2}) = \frac{\tan \theta_2}{(\tan \theta_2 + \tan \theta_1)^2}$$

$$Z(\frac{\tan \theta_2 + \tan \theta_1}{\tan \theta_2}) = \frac{\tan \theta_2}{(\tan \theta_2 + \tan \theta_1)^2}$$

$$Z = \tan \theta_2 + \tan \theta_1$$

$$= \tan d = \tan \theta_2 + \tan \theta_1$$

$$d = \tan^{-1} (\tan \theta_2 + \tan \theta_1)$$



تأثير شدة حوض على قمة مضخة ارتفاعها  $h$  عن سطح البحر  
 حيث أن هناك مدى حلقى الشكل مساحته  $8\pi kh$  يكون  
 الحصن خلاله خارج مدى إلى ضابيه لقذائف سفينة حربية  
 ويكون السفينة خلاله داخل مدافع الحصن والسفينة  $\sqrt{2k}$



الحصن -  
 إحداثيات الحصن  $(R_1, -h)$   
 السفينة  $(R_2, h)$

معادلة القطع المفلق

$$x^2 = 4\lambda(\lambda - y)$$

$$\therefore \lambda = \frac{U_0^2}{2g} = \frac{2kg}{2g} = k$$

$$\therefore x^2 = 4k(k - y)$$

الحصن

$$R_1^2 = 4k(k + h) \quad (1)$$

السفينة

$$R_2^2 = 4k(k - h) \quad (2)$$

ب طرح ا من ؟

$$R_1^2 - R_2^2 = 4k(k + h) - 4k(k - h)$$

$$R_1^2 - R_2^2 = 8kh$$

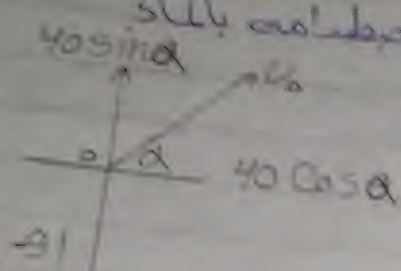
ب ضرب في  $\pi$

$$\pi(R_1^2 - R_2^2) = 8\pi kh$$

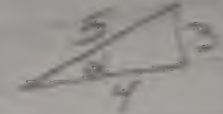
هناك مدى حلقى الشكل مساحته  $8\pi kh$  يكون  
 الحصن خلاله خارج مدى إلى ضابيه والسفينة داخله



مثال: هدف حجر إلى العنبر من قمة حفرة ارتفاعها  $91 \text{ ft}$  عن سطح البحر بسرعة مقدارها  $40 \text{ ft/sec}$  في اتجاه يمين رأية قدرها  $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ . أليست أن الحجر يصل إلى سطح الماء عند نقطة تبعد  $104 \text{ ft}$  عن قاعدة الحفرة وأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر واتجاه حركته عندما يصل إلى الماء والوقت اللازم لذلك (لو صوله إلى أقصى ارتفاع) وكذا المتوسطات بالماء



$$\tan^{-1} \frac{3}{4} = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$



النقطة P تقع على المسار

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2u_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

$$-91 = \alpha \cdot \frac{3}{4} - \frac{32}{2(40)^2 (\frac{4}{5})^2} \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4} \alpha - \frac{1}{59} \alpha^2$$

$$\therefore \alpha = -56 \quad \alpha = 104 \quad \#$$

$$H = \frac{u_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(40)^2 (\frac{3}{5})^2}{2 \times 32} = 9 \text{ ft}$$

وعليه يكون أقصى ارتفاع عن سطح البحر  $= 91 + 9 = 100 \text{ ft}$

$$\therefore t_1 = \frac{u_0 \sin \alpha}{g} = \frac{40 \times \frac{3}{5}}{32} = \frac{3}{4} \text{ sec} \quad \#$$

$$\therefore x = u_0 t \cos \alpha \Rightarrow t = \frac{x}{u_0 \cos \alpha} = \frac{104}{40 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{13}{4}$$

وعليه يكون زمن الارتفاع = الماء



لحساب اتجاه حركته بعد الانعطاف  $\alpha$  في اتجاه الحركة.

$$\dot{x}|_p = v_0 \cos \alpha = 40 \times \frac{4}{5} = 32 \text{ ft/sec}$$

$$\dot{y}|_p = -gt + v_0 \sin \alpha = -32 \times \frac{13}{4} + 40 \times \frac{3}{5} = -80$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}|_p = \frac{-80}{32} = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \frac{-5}{2}$$

وهذا هو اتجاه الحركة.

مثال: قذف جسم بسرعة  $u \cos \beta$  في اتجاه يصنع زاوية  $\beta$  مع  
الرأس على المستوى يميل بزاوية  $2\beta$  في اتجاه أفقي  
المستوى أثبت أن زمن الطيران  $\frac{u}{g}$  والمدى  $\frac{u^2 \sin 4\beta}{g}$  وأن  
الجسم يميل بسرعة  $u \sin \beta$  واتجاه حركته عندئذ يكون  
عمودياً على اتجاه القذف

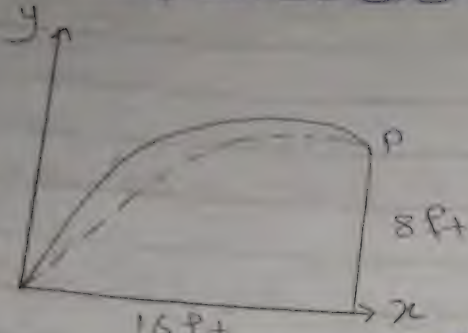
الملاحظة: الملاحظة القادمة



٤٠٤٣٩

مسألة 3

مثال ٤ - أحمد ومحمد شقيقا ليدريا بتدقية واحدة تطلق الرصاص بسرعة  $32 \text{ ft/sec}$  فإذا أراد الشقيقان إصابة هدف ما بعد عنها  $16 \text{ ft}$  وعلى ارتفاع  $8 \text{ ft}$  فأثبتت أن كلا منهما يمكنه إصابة الهدف بزوايا مختلفة. القدي تم على مستوى الأرض تأخذ القذيفة في كل حالة علما بأن



النقطتين P (8 و 16) تقع على المسار

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$8 = 16 \tan \alpha - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{(16)^2 \cos^2 \alpha}{(32)^2 \cos^2 \alpha}$$

$$8 = 16 \tan \alpha - \frac{4}{\cos^2 \alpha}$$

بضرب المعادلة في

$$8 \cos^2 \alpha = 16 \cos^2 \alpha \tan \alpha - 4$$

$$\cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2}$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = 0$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0$$

$$-2 \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha = 0$$

$$(3 \cos \alpha - \sin \alpha) (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$$

$$\therefore 3 \cos \alpha = \sin \alpha \quad , \quad \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$\therefore \tan \alpha = 3 \quad , \quad \tan \alpha = 1$$

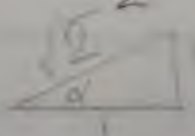
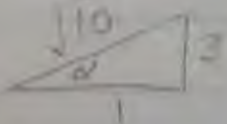
$$x = U t \cos \alpha \Rightarrow t = \frac{x}{U \cos \alpha}$$

معرفة الزمن

$$\therefore t = \frac{16}{32 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}} \quad , \quad t = \frac{16}{32 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

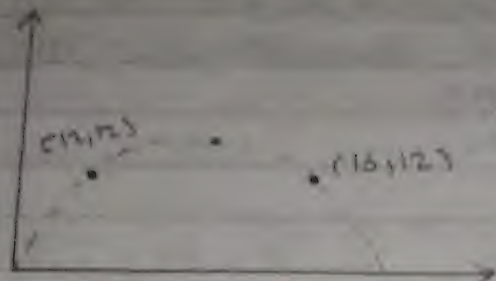
$$t = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ sec}$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sec}$$

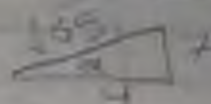




أطلقت قذيفة من نقطة 0 ووجد أن المسار بالنقطتين (16, 12) و (12, 12) أو بعد سرعة القذيفة مقداراً أو اتجاهها أثبت أن:  
 القذيفة هو 2 sec وأن المدى على المستوى الأفقي هو 48 ft  
 28 ft 1.75



النقطتين (16, 12) و (12, 12) تقع على المسار



$$y = xZ - kx^2$$

$$\therefore 12 = 16Z - (16)^2 k \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore 12 = 12Z - (12)^2 k \Rightarrow \textcircled{2}$$

من 2 أ ينتج أن

$$Z = \frac{7}{4}$$

$$k = \frac{1}{16} \Rightarrow R = \frac{Z}{k} \Rightarrow R = \frac{7}{4} \cdot 16 = 28 \text{ ft}$$

$$Z = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} Z = \tan^{-1} \frac{7}{4}$$

$$\tan^{-1} \frac{7}{4}$$

= اتجاه الحركة هو

$$k = \frac{g}{2U^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{16} = \frac{32}{2U^2 \cdot \frac{16}{65}}$$

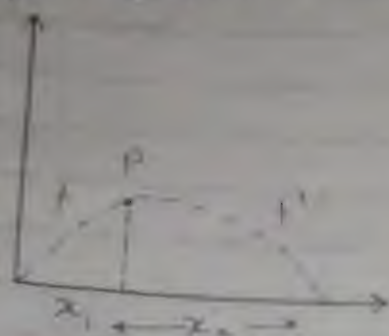
$$\therefore U = 4\sqrt{65}$$

وهذا مقدار السرعة

$$t = \frac{2U_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{65} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}}}{32} = \frac{7}{4} \text{ sec}$$



مثلاً إذا علم أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من نقطة قذفه حتى يصل إلى نقطة P على المسار هو  $t$  وبعد هاتين نقطتي القذف أفقياً هو  $x_1$  وأن الزمن الذي يأخذه من P حتى يصل إلى النقطة الثانية مع الذفق المسار نقطة الهدف هو  $t'$  وبعداها أفقياً هو  $x_2$  أثبت أن الارتفاع P هو

$$y_p = \frac{1}{2} g t t' = \frac{x_1 x_2 \tan \alpha}{x_1 + x_2}$$


النقطتين P تقع على المسار  
في الطيران بعد  
الهدف هو

$$T = (t + t') = \frac{2U \sin \alpha}{g} \Rightarrow U \sin \alpha = \frac{g}{2} T \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y_p &= U t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= U \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= T \cdot t \cdot \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= (t + t') \cdot t \cdot \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} g t t' - \frac{1}{2} g t^2 \\ y_p &= \frac{1}{2} g t t' \quad \# \end{aligned}$$

$$R = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad (2)$$

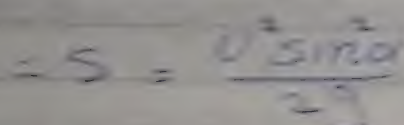
$$y_p = x_1 \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_1^2}{U^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{بالتعويض من (1)}$$

$$y_p = x_1 \tan \alpha - \frac{x_1^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha R} = x_1 \tan \alpha - \frac{x_1^2}{(x_1 + x_2)} \tan \alpha$$

$$y_p = \tan \alpha \left[ x_1 - \frac{x_1^2}{x_1 + x_2} \right] = \tan \alpha \left[ \frac{x_1^2 + x_1 x_2 - x_1^2}{x_1 + x_2} \right]$$

$$y_p = \tan \alpha \left[ \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right] \quad \#$$



$$R = \emptyset$$
$$P = \frac{1}{2} - \alpha$$


$$= 2S_0 = v^2 \sin^2 \alpha$$

$$= 250 = U \sin \alpha$$

$$R = \rho \cdot \frac{U^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{2U \sin \alpha U \cos \alpha}{2}$$

$$= p = 2 \sqrt{259} \cdot \sqrt{259} = 2 \sqrt{4550^2}$$

$$= 4 \sqrt{55}$$

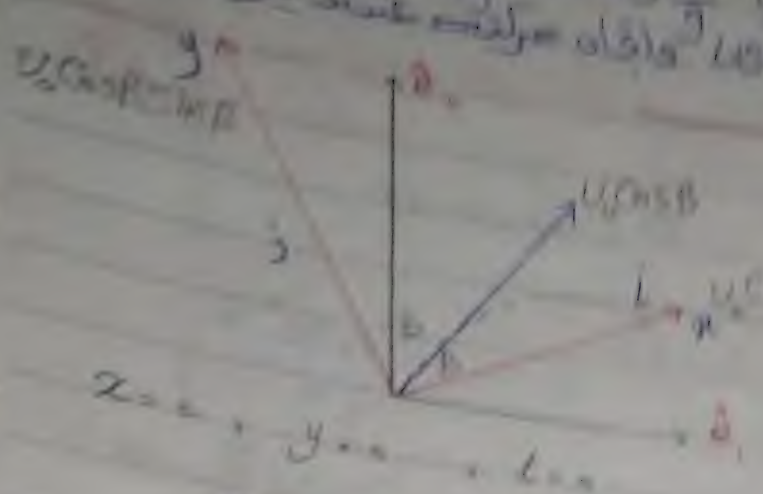
#

Chet 5 dia



# (القيود)

فلو فرضنا أن الجسم يتحرك في اتجاه  $U$  مع زاوية  $\beta$  مع الرأس  
 على مستوى  $xy$  مع الرأس  $U \cos \beta$  و  $U \sin \beta$  في اتجاه  $y$   
 المستوي  $xy$  حيث أن  $U$  هو السرعة و  $\beta$  هي الزاوية  
 السرعة  $U$  في اتجاه  $x$  هي  $U \cos \beta$  و في اتجاه  $y$  هي  $U \sin \beta$   
 في اتجاه  $x$  هي  $U \cos \beta$  و في اتجاه  $y$  هي  $U \sin \beta$   
 الزاوية  $\beta$  هي الزاوية بين اتجاه  $U$  و اتجاه  $x$   
 أي أن الزاوية بين  $U$  و  $x$  هي  $\beta$



الزاوية  $\beta$  هي الزاوية بين اتجاه  $U$  و اتجاه  $x$   
 أي أن الزاوية بين  $U$  و  $x$  هي  $\beta$

القيود على الحركة

$$F = ma = -mg \hat{j}$$

$$a = (x'' \hat{i} + y'' \hat{j}) = -g \hat{j}$$

$= 0$

بالتكامل في اتجاه  $x$

$$x'' = -g \cos 2\beta$$

$$x' = -gt \sin 2\beta$$

بالتكامل في اتجاه  $y$

$$y'' = -g \sin 2\beta$$

$$y' = -gt \cos 2\beta + C_1$$

بالتكامل في اتجاه  $x$

$$C_1 = U_0 \cos \beta$$

$$C_2 = U_0 \sin \beta \cos \beta$$

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \cos 2\beta + U_0 t \cos \beta$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \sin 2\beta + U_0 t \sin \beta \cos \beta$$

بالتكامل في اتجاه  $y$

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \cos 2\beta + U_0 t \cos \beta + C_3 = y = -\frac{1}{2} g t^2 \sin 2\beta + U_0 t \sin \beta \cos \beta + C_4$$

بالتكامل في اتجاه  $x$

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \cos 2\beta + U_0 t \cos \beta$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \sin 2\beta + U_0 t \sin \beta \cos \beta$$

بالتكامل في اتجاه  $y$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \sin 2\beta + U_0 t \sin \beta \cos \beta$$



$$a = t \left( \frac{1}{2} g \sin 2\beta + U_0 \sin \beta \cos \beta \right)$$

$t = 0$  OR القوس = 0

$$= \frac{1}{2} g \sin 2\beta t + U_0 \sin \beta \cos \beta = 0$$

$$\frac{1}{2} g \sin 2\beta t = U_0 \sin \beta \cos \beta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta \cdot gT = U_0 \sin \beta \cos \beta$$

$$gT = U_0 \Rightarrow T = \frac{U_0}{g}$$

$$t = T = \frac{U_0}{g} \text{ عند } x = R \text{ ————— معرفة المدى}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} g t^2 \cos 2\beta + U_0 t \cos^2 \beta$$

$$= x = t \left( \frac{1}{2} g t \cos 2\beta + U_0 \cos^2 \beta \right)$$

$$= R = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{U_0^2}{g^2} [2 \cos^2 \beta - 1] + U_0 \cdot \frac{U_0}{g} \cos^2 \beta$$

$$= R = \frac{U_0^2}{g} \left( \frac{1}{2} (2 \cos^2 \beta - 1) \right) + \frac{U_0^2}{g} \cos^2 \beta$$

$$R = \frac{U_0^2}{g} \left[ -\cos^2 \beta + \frac{1}{2} + \cos^2 \beta \right] = \frac{U_0^2}{2g}$$

معرفة سرعة الجسم لحظة وصوله إلى المستوى الأفقي

$$x = R, \quad y = 0, \quad t = T$$

$$\dot{x} = -g t \cos 2\beta + U_0 \cos^2 \beta$$

$$\dot{x} = -g \frac{U_0}{g} [2 \cos^2 \beta - 1] + U_0 \cos^2 \beta$$

$$\dot{x} = U_0 [1 - 2 \cos^2 \beta + \cos^2 \beta] = U_0 [1 - \cos^2 \beta]$$

$$\dot{x} = U_0 \sin^2 \beta \quad \text{①}$$

$$\dot{y} = -g t \sin 2\beta + U_0 \sin \beta \cos \beta$$

$$\dot{y} = -g \cdot \frac{U_0}{g} (2 \sin \beta \cos \beta) + U_0 \sin \beta \cos \beta$$

$$\dot{y} = U_0 (-2 \sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cos \beta) = -U_0 \sin \beta \cos \beta \Rightarrow \text{②}$$

$$= |V| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{U_0^2 \sin^4 \beta + U_0^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}$$

$$= \sqrt{U_0^2 \sin^2 \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)} = U_0 \sin \beta$$



الدشبات اتجاه الحركة معروف على اتجاه القوة  
 أدلة اتجاه الحركة هو اتجاه السرعة اتجاه القوة إبقاء السرعة ثابتة  
 مثلاً عند ضرب قوس في قوس مع متعة السهم إلى ثباته إذا كان قوسك  
 كان الناتج هو ذلك ذلك

$$\begin{aligned} & \dot{u} \sin \theta \cos \phi + \dot{v} \sin \theta \sin \phi + \dot{w} \cos \theta \\ & \dot{u} \cos \theta \cos \phi + \dot{v} \cos \theta \sin \phi + \dot{w} \sin \theta \\ & \dot{u} \sin \theta \sin \phi + \dot{v} \sin \theta \cos \phi + \dot{w} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{u} \sin \theta \cos \phi + \dot{v} \sin \theta \sin \phi + \dot{w} \cos \theta \\ & \dot{u} \cos \theta \cos \phi + \dot{v} \cos \theta \sin \phi + \dot{w} \sin \theta \\ & \dot{u} \sin \theta \sin \phi + \dot{v} \sin \theta \cos \phi + \dot{w} \sin \theta \end{aligned}$$

عبداً ثبوت الطاقة

الشغل هو تكامل القوة بالنسبة للإزاحة



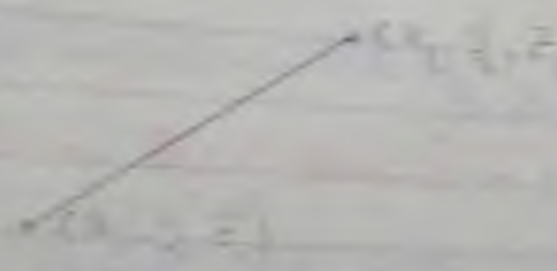
$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

المجال الإحداثي هو دالة عند كل نقطة في الفراغ تعطين دوال  
 ذات القيمة المتجهة

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

في أنواع المعادلات البارامترية  
 الخط المستقيم

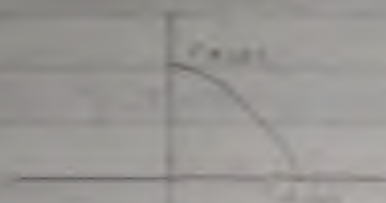


$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} & \dot{x} = v \\ & x = vt \\ & \dot{x} = v \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & x = at \\ & \dot{x} = a \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & x = at^2 \\ & \dot{x} = 2at \\ & \ddot{x} = 2a \end{aligned}$$

حيث  $t$  نقطة في المسار

المجال المحافظ: هو المجال الذي لا يتغير مع الزمن  
شروطه: ① لا يعتمد على الزمن  
حيث

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

تكون  $\vec{F}$  قوة محافظة تنشئ مجال محافظ



مثال: أثبت أن القوى  $F = (2x^2y - z^3)\mathbf{i} + (4xyz + xz^2)\mathbf{j} + (3xy^2 + yz^2)\mathbf{k}$  غير محافظة.

$$\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x^2y - z^3) & (4xyz + xz^2) & (3xy^2 + yz^2) \end{vmatrix}$$

$$\nabla \wedge F = (2x^2z + z^3 - (3xy + 2xz))\mathbf{i} - (4xyz - 2z^2) + (3yz + z^2 - x^2)\mathbf{k}$$

القوى غير محافظة

ملاحظة

القوى المحافظة لا تعتمد على الزمن أو المسار  
مق: يوجد دالة جهد؟ عندما تكون القوة محافظة

إذا كانت  $F$  مجال محافظ فإن دالة الجهد تعطى من  
أثبت أن القوة التالية محافظة وأوجد دالة الجهد المناظرة للقوة

$$F = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$$

$$\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$\nabla \wedge F = (0 - 0)\mathbf{i} - (3z^2 - 3z^2)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0$$

القوى محفوظة

كمية دالة الجهد

$$F = -\nabla \cdot \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\therefore -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + z^3 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2xy - z^3 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x^2 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 3xz^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -3xz^2 \quad (3)$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2xy + z^3$$

$$N = -x^2y + z^3x + \mathcal{G}(y, z)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = -x^2 + \mathcal{G}_y(y, z)$$

$$-x^2 = -x^2 + \mathcal{G}_y(y, z)$$

$$\therefore \mathcal{G}_y(y, z) = 0$$

$$\mathcal{G}(y, z) = h(z)$$

$$N = -x^2y + z^3x + h(z)$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -3xz^2 + h'(z)$$

$$-3xz^2 = -3xz^2 + h'(z)$$

$$\therefore h'(z) = 0$$

$$h(z) = \text{Constant}$$

$$\therefore N = -x^2y - z^3x + C$$



مسألة ٧

حالة ٤ الدكتور حله في محاضرة رقم ٥

حل ٤ أوجد المتوازيات  $a, b, c$  التي تجعل القوة التالية محافظة  
 $F = (cx + 2y + az) \mathbf{i} - (bx - 3y - z) \mathbf{j} + (4x + cy + 2z) \mathbf{k}$   
 = القوة محافظة

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (cx + 2y + az) & (bx - 3y - z) & (4x + cy + 2z) \end{vmatrix} = 0$$

$$= [c+1] \mathbf{i} - [4-a] \mathbf{j} + [2-b] \mathbf{k} = 0$$

$$= c = -1 \quad , \quad a = 4 \quad , \quad b = 2$$

ال

٤

حالة ٤ الدكتور حله في محاضرة رقم ٥



## الحاضرة ٥

### ١- مبدأ نيوتن للطاقة



الشغل = تكامل القوى بالنسبة للإزاحة  
بقوة تدفع على تحريك الجسم من  
 $dr = r$

$$dW = F \cdot dr \quad (1)$$

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

$$F \cdot dr = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \quad (2)$$

الشغل هو تكامل ذلك

$$W = \int_C F \cdot dr$$

حيث  $C$  هي تكامل مأخوذ على المسار

كمية الحركة = سرعة الجسم في كتلته

$$P = m \cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m \cdot a = F$$

وهذا يوضع قانون نيوتن الثالث

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

طاقة الحركة

العلاقة بين الشغل والطاقة الحركية

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C m \cdot a \cdot dr = \int_C m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dr = \int_C m \left[ \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \right] dt$$

$$W = m \int_{t_1}^{t_2} v \cdot \frac{dv}{dt} dt = m \int_{P_1}^{P_2} v \cdot dv = m \int_{P_1}^{P_2} v dv$$

$$W = \frac{1}{2} m [v^2]_{P_1}^{P_2} = \frac{1}{2} m [v_2^2 - v_1^2] = E_{k2} - E_{k1}$$

الشغل المنبذل في إزاحة جسم من  $P_1$  :  $P_2$  عبارة عن التغير في طاقة الحركة

عند  $P_2$  - طاقة الحركة عند  $P_1$

القوى المحافظة :- هي القوة التي لا ترتبط بالزمن

شروطها :- لا ترتبط بالزمن

$$F = -\nabla U$$

U تعرف ب طاقة الجهد



$$F \cdot \nabla U = 0 \quad (3)$$

الشغل لا يعتمد على المسار وبالتالي  $\oint F \cdot dr = 0$  (4)



لدي متجه مطلق يكون الشغل صفر  $W = \int_a^b F \cdot dr = 0$  (5)

في القوى المحافظة الشغل لا يعتمد على المسار  $W = \int_a^b F \cdot dr = 0$  (6)

الشغل من  $a \rightarrow b$  يساوي الشغل من  $b \rightarrow a$   $W_{a \rightarrow b} = \int_a^b F \cdot dr = - \int_b^a F \cdot dr = -W_{b \rightarrow a}$

$\oint F \cdot dr = 0$   $F = -\nabla U$

طاقة الجهد: يطلق على الطاقة التي تحقق المعادلة  $F = -\nabla U$  طاقة الجهد (U) في المجالات المحافظة

لكل مجال محافظ دالة جود  $\nabla \cdot F = 0$  (لا يوجد بؤبؤات)

علاقة دالة الجود بالشغل  $W = \int_c F \cdot dr = - \int_c \nabla U \cdot dr$

دالة قياسية  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$  و  $U =$

$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$  ,  $dr = dx i + dy j + dz k$

$\nabla U \cdot dr = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \rightarrow$  المتماثلة بكلية  $\nabla U \cdot dr = dU$

$\therefore W = - \int dU = - \int_{P_1}^{P_2} dU = - [U]_{P_1}^{P_2} = U_1 - U_2$   
 الشغل المبذول على إزاحة جسم من  $P_1$  عبارة عن طاقة في الجهد عند  $P_1$  - طاقة الجهد الجسم عند  $P_2$

$\therefore W = U_1 - U_2 \rightarrow (4) \rightarrow -U_{net} = W \Rightarrow U_{net} - W = - \int F \cdot dr$   
 المجالات المحافظة فقط وفي المجالات غير المحافظة تعرف  
 U ب طاقة الوضع والقوانين نفسها



الموتر المتناقصات:

\* جميع المتوتر المتناقصات في الإحداثيات المتناقصات:

4. الإحداثيات الكروية:  $(r, \theta, \phi)$

$$\vec{r} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{\phi}$$

$$\vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3$$

$\vec{r}$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \phi}$	
$r_1$	$r_2$	$r_3$	

\* الإحداثيات الإسطوانية:  $(\rho, \phi, z)$

$$\vec{r} = \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{\rho} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{\rho} \vec{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}$$

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$\vec{r}$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\frac{\partial}{\partial \rho}$	$\frac{\partial}{\partial \phi}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$\times \frac{1}{\rho}$
$\rho$	$\rho \vec{e}_1$	$\rho \vec{e}_2$	$\rho \vec{e}_3$

\* الإحداثيات الكروية:  $(r, \theta, \phi)$

$$\vec{r} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \vec{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{\phi}$$

$$\vec{r} = r \vec{e}_1 + \frac{1}{r} \vec{e}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_3$$

$\vec{r}$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \phi}$	
$r$	$r \vec{e}_1$	$r \vec{e}_2$	$r \sin \theta \vec{e}_3$



**في هذا الباب نتناول:**

- 1- العلاقة الشغل و طاقة الحركة عند موضوعين
- 2-  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  -  $E_p = mgh$
- 3- العلاقة الشغل و طاقة الحركة عند موضوعين
- 4-  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  -  $E_p = mgh$

من الامثلة نتج ان  
 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  -  $E_p = mgh$   
 مفهوم طاقتي الحركة واليد عند ان تقطع على السطح  
 ثابت وهو  $E_k + E_p = \text{const}$  وهذا هو مبدأ ثبات الطاقة

نأخذ جسم كتلته  $m$  يتحرك في السكون  $x=0$  حيث يكون موقعه  
 الوضع هو  $x=0$   $E_k = 0$   $E_p = mgh$  حيث  $h$  هو الارتفاع  
 من  $x=0$   $E_k = \frac{1}{2}mv^2$   $E_p = 0$

- 1- بين ان الجسم يتحرك في قطع ناقص
- 2- اثبت ان القوة المؤثرة على الجسم تغير دلتا و تقطع الزمكان
- 3- اثبت ان العمل القوة مع عمل معاد و اوجد دالة الجهد الناطرة
- 4- اوجد طاقة الحركة عند  $A$  و  $B$  حيث  $A = (0, a)$   $B = (0, b)$
- 5- اوجد الشغل المبذل في تحريك الجسم من  $A$  الى  $B$
- 6- بين ان الشغل المبذل بواسطة القوة في تحريك الجسم مرة واحدة حول القطع الناقص يساوي صفراً

**الحل:**

**المعطيات:**

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \sin \omega t$$

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t$$

$$\frac{y}{b} = \sin \omega t$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \omega t$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t$$

**والجمع**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





المطلوب الثالث

معادلات الحركة

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dr}{dt^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = -a \omega \sin \omega t \hat{i} + \omega b \cos \omega t \hat{j} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{d^2 r}{dt^2} = -a \omega^2 \cos \omega t \hat{i} - \omega^2 b \sin \omega t \hat{j} = -\omega^2 r \quad (2)$$

$$F = -m \omega^2 r = -m \omega^2 r \hat{r}$$

إفقاء القوة دائما يكون اتجاه  $\hat{r}$  وإفقاء  $\hat{r}$  من نقطة الأصل إلى خارجها  
وبالتالي يمكن الإفقاء يكون إلى نقطة الأصل .

المطلوب الثاني القوة تكون دائما إفقاء نقطة الأصل إلى الشكل لإدائيه وإيضاحيه  
وهي ما تعرف في الجذب المركزي .

المطلوب الثالث :

$$F = -m \omega^2 r \hat{r}$$

$$\therefore \nabla \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ -m \omega^2 r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{r} [0] - r \hat{\theta} [0] + r \sin \theta \hat{\phi} [0] = 0$$

القوى متافضيه و داله الجهد لها هي :

$$U = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C (-m \omega^2 r) \cdot dr = m \omega^2 \int_r^{r_1} r \cdot dr$$

$$= m \omega^2 \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_r^{r_1} = \frac{1}{2} m \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) \quad \#$$



المطلوب الرابع :-

من أين أتى

$$E_k + \frac{1}{2} m v^2 \quad \cdot \quad v = \frac{dr}{dt}$$

$$\begin{aligned} v &= -a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j} \\ \Rightarrow v \cdot v &= v^2 \Rightarrow (-a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j}) \cdot (-a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j}) = \omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t) \quad (3) \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t) \end{aligned}$$

At

$$\cdot A(a, 0)$$

$$x = a \cos \omega t$$

$$a = a \cos \omega t$$

$$1 = \cos \omega t$$

$$\therefore E_k|_A = \frac{1}{2} m \omega^2 [a^2 (1)^2 + b^2 (1)^2] = \frac{1}{2} m b^2 \omega^2$$

at

$$B(0, b)$$

$$x = a \cos \omega t$$

$$0 = a \cos \omega t$$

$$0 = a \cos \omega t$$

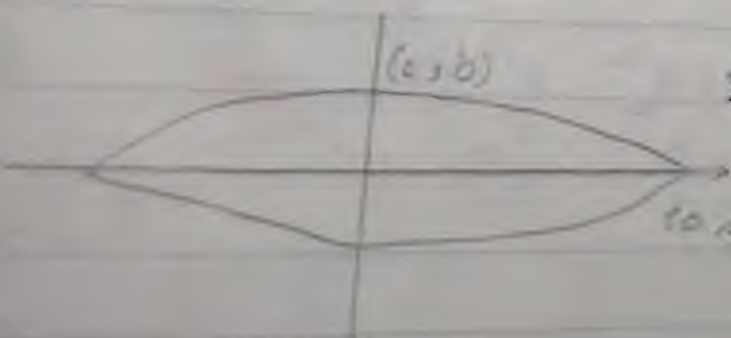
$$\therefore E_k|_B = \frac{1}{2} m \omega^2 [a^2 (1)^2 + b^2 (0)^2] = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

$$W_{A \rightarrow B} = E_k B - E_k A = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m b^2 \omega^2$$

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2)$$

المطلوب السادس :-

الجسم دار دورة كاملة بزاوية  $2\pi$



$$\therefore \omega T = 2\pi$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$$



الجسم الذي يتحرك في دائرة نصف قطرها  $r$  بسرعة  $v$  في اتجاه عقارب الساعة.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega^2 [a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}]$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega [-a \sin \omega t \mathbf{i} + b \cos \omega t \mathbf{j}] = \omega [-a \sin \omega t \mathbf{i} + b \cos \omega t \mathbf{j}]$$

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -m\omega^3 [a^2 \sin \omega t \cos \omega t + b^2 \cos \omega t \sin \omega t]$$

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -m\omega^3 (b^2 - a^2) \sin \omega t \cos \omega t$$

بالتعويض من 4 في 5

$$W = \int_0^{2\pi} -m\omega^3 (b^2 - a^2) \sin \omega t \cos \omega t dt$$

$$= -m\omega^3 (b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos \omega t dt$$

$$= -\frac{1}{2} m\omega^3 (b^2 - a^2) [\sin^2 \omega t]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} m\omega^3 (b^2 - a^2) [\sin^2 2\pi - \sin^2 0] = 0$$

مثال: جسم كتلته  $m$  يتحرك على المحور  $x$  تحت تأثير مجال قوة محافظة  $U(x)$ . إذا كان الجسم يشغل الموقعين  $x_1$  و  $x_2$  عند اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  على التوالي فاثبت أن:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

∴ القوى محافظة

$$U + E_k = E$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = E - U$$

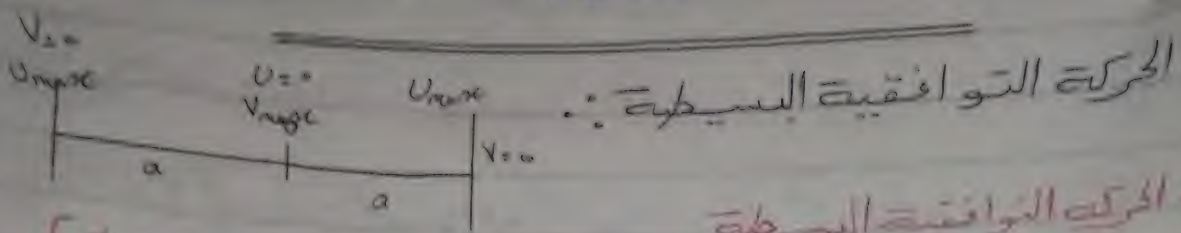
$$v^2 = \frac{m}{2} (E - U)$$



$$v = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{E-U} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{E-U}$$

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E-U}} \Rightarrow \int_1^2 dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E-U}} \quad \#$$



في الحركة التوافقية البسيطة

$$F dx \Rightarrow F = -kx$$

المسالبة لأن القوة عكس المسافة في الاتجاه من موضع التوازن

$$F = m \ddot{x}$$

$$F = -kx$$

$$m \ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

let  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \text{وهذه هي الصورة المعيارية للحركة}$$

من أين نرى أن المعادلة دالة في الإزاحة

$$\ddot{x} \frac{dx}{dt} = -\omega^2 x \Rightarrow \dot{x} d\dot{x} = -\omega^2 x dx$$

بالتكامل

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2 + C$$

وعند  $x=a$  يكون  $\dot{x}=0$

$$0 = -\frac{1}{2} \omega^2 a^2 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \omega^2 a^2$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 a^2$$

$$\dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + \omega^2 a^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$$

$$\dot{x} = \pm \omega (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega (a^2 - x^2)^{1/2}$$

لكن تأخذ الموجب



$$\omega dt = \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$\omega t + C_2 = \sin^{-1} \frac{x}{a} \Rightarrow \sin^{-1} \frac{x}{a} = \omega t + C$$

بالكامل حيث  $C$  ثابت التكامل وظرف زاوية الطور

يتأثر  $\sin$  الطرفين

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t + C) \Rightarrow x = a \sin(\omega t + C)$$

$$x = a [\sin \omega t \cos C + \sin C \cos \omega t]$$

$$\text{let } A = a \cos C, \quad B = a \sin C$$

$$\therefore x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

\* الزمن الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{second}$$

\* التردد  $(\nu)$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{second}^{-1}$$

\* السعة  $(a)$

$$A = a \cos C, \quad B = a \sin C$$

$$A^2 + B^2 = a^2 \Rightarrow a = (A^2 + B^2)^{1/2} \quad \text{تربيع الطرفين والجمع}$$

\* أقصى سرعة  $(V_{\max})$

$$V = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{at } V = V_{\max} \quad x = 0$$

$$\therefore V_{\max} = \pm \omega a$$



ثالثاً: نترك نقطة مادية حرة في توافق بسيط حول  $O$  فإذا كانت  
إزاحتها عن  $O$  في ثلاث ثوان متتالية هي  $x_1, x_2, x_3$  في نفس  
الجهة، أثبت أن الزمن الدوري هو  $\frac{2\pi}{\omega} \left( \frac{x_1 + x_3}{x_2} \right)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \cos^{-1} \frac{x_1 + x_3}{2x_2}$$

$$C = 1$$

نفرض أن التوافق التانلي

$$x = a \sin(\omega t)$$

لم نضرب في  $\omega$  لأننا في فظ مستقيم ولو أضفنا  $\omega$  نحتاج عندنا  $\omega$

$$x_1 = a \sin(\omega t - \pi) \quad x_2 = a \sin \omega t \quad x_3 = a \sin(\omega t + \pi)$$

$$x_1 + x_3 = a [\sin(\omega t - \pi) + \sin(\omega t + \pi)]$$

$$= a [\sin \omega t \cos \pi - \cos \omega t \sin \pi + \sin \omega t \cos \pi + \cos \omega t \sin \pi]$$

$$= a [2 \sin \omega t \cos \pi] = 2a \sin \omega t \cos \pi \quad (1)$$

$$2x_2 = 2a \sin \omega t \quad (2)$$

$$\frac{x_1 + x_3}{2x_2} = \frac{2a \sin \omega t \cos \pi}{2a \sin \omega t} = \cos \pi$$

$$\therefore \omega = \cos^{-1} \frac{x_1 + x_3}{2x_2}$$

#

مثال: إذا كانت إزاحة نقطة مادية عند الزمن  $t$  تعطى بالمعادلة

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

أثبت أن الحركة توافقية بسيطة ثم أوجد سعة الإزاحة



$$\begin{aligned}
 x &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\
 \dot{x} &= -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\
 \ddot{x} &= -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \\
 \ddot{x} &= -\omega^2 [A \cos \omega t + B \sin \omega t]
 \end{aligned}$$

المركبة توافقية بسيطة لأن  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  الصورة إقامية  
 = المركبة توافقية بسيطة

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\
 &= a^2 = A^2 + B^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\therefore x = \sqrt{A^2 + B^2} \left[ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right]$$

$$\therefore x = \sqrt{A^2 + B^2} [\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t]$$

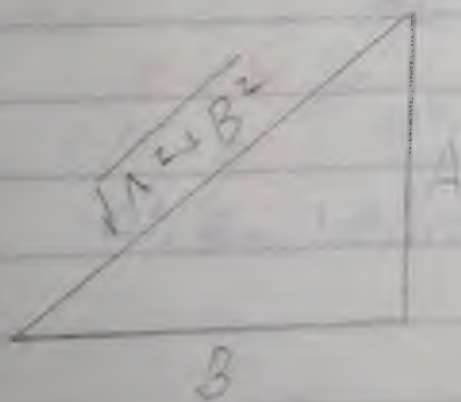
$$x = \sqrt{A^2 + B^2} [\sin(\omega t + \alpha)]$$

$$x = a \sin(\omega t + \alpha)$$

وبالقياس الصورة القياسية =

$$x = a \sin(\omega t + \epsilon)$$

$$\epsilon = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$





مبدأ حفظ الطاقة

# مسألة ٥

جسيم كتلته  $m$  يتحرك على محور  $x$  بقوة  $F = -\frac{k}{x^2}$  حيث  $k$  ثابت  
 ثابت إذا بدأ الجسيم الحركة من السكون عند الموضع  $x=a$  حيث  
 أن زمن الوصول لنقطة الأصل يساوي  $\frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}$

$$F = -\frac{k}{x^2} = m\ddot{x} = m x \frac{d\dot{x}}{dx}$$

$$\ddot{x} dx = \frac{-k}{mx^2} dx \Rightarrow \int \ddot{x} dx = \frac{-k}{m} \int x^{-2} dx$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{k}{mx} + C_1$$

$$\text{at } x=a, \dot{x}=0 \Rightarrow C_1 = -\frac{k}{ma} \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{k}{mx} - \frac{k}{ma} = \frac{k}{m} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) = \frac{k}{m} \left( \frac{a-x}{ax} \right)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2k}{m} \left( \frac{a-x}{ax} \right) \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2k}{m}} \left( \frac{a-x}{ax} \right)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}} \left( \frac{a-x}{ax} \right)^{1/2} \Rightarrow \text{الموضع هو موجب لأن القوة سالبة}$$

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a-x}} dx = -\sqrt{\frac{2k}{m}} dt \Rightarrow \int \frac{\sqrt{xa}}{\sqrt{a-x}} dx = -\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{m}} \int dt$$

استخدم التكال بالخطري

$$x = a \sin^2 \theta \Rightarrow dx = 2a \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\text{at } x=a \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, x=0 \rightarrow \theta = 0$$

$$\int_a^0 \frac{\sqrt{xa}}{\sqrt{a-x}} dx = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{a-a \sin^2 \theta}} 2a \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\int_{\pi/2}^0 \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a} \cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = -\sqrt{\frac{2k}{m}} \int dt$$

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a}} \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \theta d\theta = -\sqrt{\frac{2k}{m}} \int dt$$



$$\frac{da^2}{\sqrt{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [1 - \cos 2\theta] d\theta = \sqrt{\frac{2k}{m}} \int dt$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{a}} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} t$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{a}} \left[ \frac{\pi}{2} \right] = \sqrt{\frac{2k}{m}} t \Rightarrow t = \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \quad \#$$

مثال :- أثبت أن القوة المعطاه بالقانون التربيع العكسي قوة محافظة  
 تم أوجد دالة الجهد

$$\underline{f} \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \underline{f} = \frac{-k}{r^2} \hat{r}$$

$$\underline{f} \wedge \nabla = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{-k}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{f} \wedge \nabla = 0$$

∴ القوة قوى محافظة

$$\therefore U = - \int \underline{f} \cdot d\underline{r} = - \int \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r}$$

$$U = k \int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow U = \frac{-k}{r} + C \quad \#$$



(ملاحظة 2)

\* تطبيقات هامة على الحركة التوافقية البسيطة :-

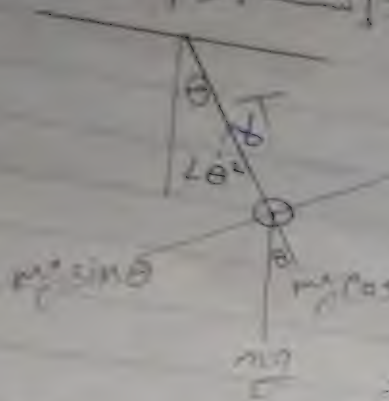
① البندول البسيط

$$r = r \hat{r}$$

$$v = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$a = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}$$

هذا المعادلات في الصورة القطبية استاجبا لمعادلة 2



المعطى في البندول غير من طوله  $l$   
 2 معادلات الحركة في البندول هي

$$a = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}$$

$$r = l = \text{constant} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$a = (0 - l \dot{\theta}^2) \hat{r} + (l \ddot{\theta} + 0) \hat{\theta}$$

$$a = -l \dot{\theta}^2 \hat{r} + l \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

هناك علاقة هامة  $l \dot{\theta}^2 = l \ddot{\theta}$

القوة المسببة للحركة هي القوى  
 من نيوتن الثاني

$$mg \sin \theta$$

$$F = ma = -mg \sin \theta$$

$$l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$l \ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

هذه المعادلات متكاملة ما يجب فيه ان ذلك تأخذ الحالة التي يكون فيها  $\theta \ll 1$  فان هذا يعني ان  $\sin \theta \approx \theta$

$$l \ddot{\theta} = -g \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta$$

let:  $\omega^2 = \frac{g}{l}$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

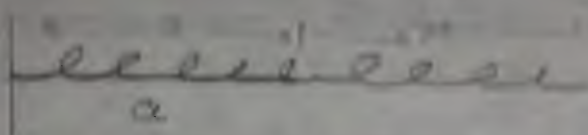
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



في حالة التوافق...

الميطعة الحركية

الشد في الميط يتناسب مع الزيادة في طول الميط



الزيادة في الميط  $\Rightarrow$  الميط بعد الشد  $\Rightarrow$  الميط الطويل  $\Rightarrow$  الميط القصير

$$T \propto \frac{(x+a)-a}{a} \Rightarrow T \propto \frac{x}{a}$$

$$T = \lambda \frac{x}{a} \Rightarrow \lambda \text{ ثابت المرونة}$$

$$T = \frac{\lambda}{a} x \Rightarrow T = k x \Rightarrow k \text{ ثابت الزنبرك}$$

الزيادة في الميط بعد شد  $x$  - الطول الطبيعي  $a$

ملحوظة: المعادلة  $T = kx$  قبل الحركة و  $x$  لزيادة قبل الحركة ولكن بعد الحركة فإن  $x$  لا تكون  $x$  التي في العلاقة "هناك فرق بينهما كبير خلاه بالك"  $x = -u^2 x$

مثال: علق زنبرك خفيف رأسيًا من أحد طرفيه وحدث أن زاد طوله  $20 \text{ cm}$  عند ما علقت كتلة  $5 \text{ gm}$  من طرفه الآخر وضع الزنبرك والكتلة على متصلة أفقية هادئة حيث ثبتت نقطة التعليق عند  $E$  وشدت الكتلة بمسافة  $20 \text{ cm}$  بعيدًا عن  $E$  أوجد معادله الحركة، التردد، السعة، الزمن الدوري



$$T = f = mg = x k \quad a = g \quad \text{حيث}$$

$$5 \times 980 = 20 k \Rightarrow k = 245 \text{ dyn/cm}$$



الركبة في موضع أقصى

$$F_{\text{max}} = -kx \Rightarrow 245x = -kx \Rightarrow x = -49x$$

الركبة توافق بسيطة

$$x = A \sin 7t + B \cos 7t$$

$$\text{at } t=0, x=20, \dot{x}=0$$

$$20 = A \sin(0) + B \cos(0) \Rightarrow A = 20$$

مشتق الموضع

$$\dot{x} = 7A \cos 7t - 7B \sin 7t$$

$$0 = 140 \cos(0) - 7B \sin(0)$$

$$0 = -7B \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore x = 20 \sin 7t$$

$$A = 20, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7}$$

$$\phi = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7}{2\pi} \pi = \frac{7}{2}$$

علاق جسيم وذات  $6 \text{ kg}$  في نهاية ربيع وأقصى حفيف  
تأخذت استطال  $40 \text{ cm}$  أوصل موضع الجسيم عند أن لحظة إذا  
كانت في البداية قد حقد  $25 \text{ cm}$  إلى أسفل ثم تركت أوصل  
المسعة والزمن المدى والتردد

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{15}{6}}} = 2.5 \text{ s}$$

الموضع

الزمن المدى

$$\sum F = mg - k(y + 0.4)$$

$$m \ddot{y} = 6 \cdot 15(y + 0.4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}(y + 0.4) = -\frac{15}{6}(y + 0.4) = -2.5(y + 0.4)$$

$$0.6 \ddot{y} = -15y - 15 \cdot 0.4$$

$$0.6 \ddot{y} = -15y - 9 \Rightarrow \ddot{y} = -2.5y - 1.5$$

الركبة توافق بسيطة

$$y = A \sin 5t + B \cos 5t$$

$$\text{at } t=0, y=0, \dot{y}=0$$



$$0.25 = A \sin 0 + B \cos 0$$

$$\Rightarrow A = 0.25$$

القابل معادل  $x$

$$= 5A \cos 5t - 5B \sin 5t$$

$$0 = -5B \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{4} \sin 5t \quad \#$$

$$a = \sqrt{A^2 + B} = a = \sqrt{A^2 + 0} \Rightarrow a = A = \frac{1}{4} m$$

$$\omega = 5 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \quad \text{و} \quad V = \frac{5}{2} \pi$$

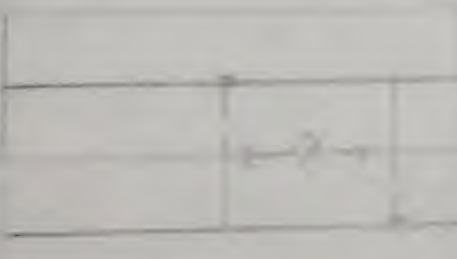
مثلاً ثبت نقطة مادية كتلتها  $(m)$  في منتصف خيط طوله الطبيعي  $2a$  وثبت طرفيه الخالصين في نقطتين من نصف أمتار قياداً علم أن  $t$  هو الشد في الخيط أثبت أن النقطة المادية تتحرك حركة توافقية بسيطة وإذا رجع في اتجاه الخيط أوجى إزتياده العمود على الخيط أوجد الزمن الدوري في كل حالة



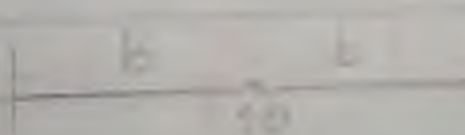
حالة 1



حالة 2

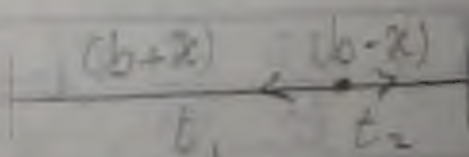


الحالة الأولى :-



الطول بعد التمدد

$$b \gg x$$





$$-F = ma \Rightarrow m\ddot{x} = T_2 - T_1$$

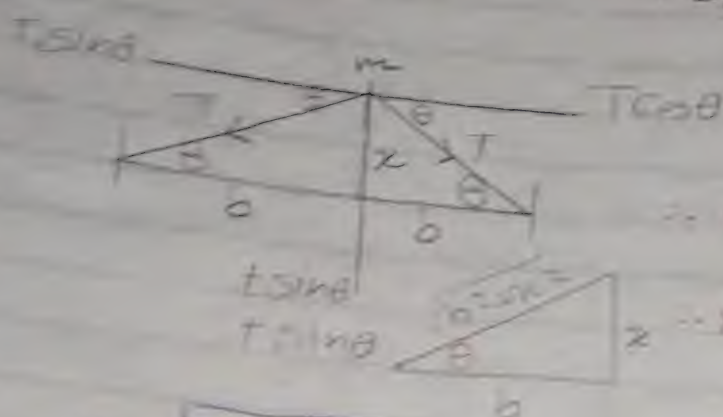
$$m\ddot{x} = \frac{\lambda}{a}(b-x) - \frac{\lambda}{a}(b+x)$$

$$= \frac{\lambda}{a}(b-x-b-x) = \frac{\lambda}{a}(-2x) = -\frac{2\lambda}{a}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{2\lambda}{m}x = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = \frac{2\lambda}{m}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\lambda}}, \quad \gamma = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2\lambda}{m}} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

المعيار الثاني



$$\therefore m\ddot{x} = -2T \sin \theta$$

$$\therefore m\ddot{x} = -2T \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$$

$$\therefore \sqrt{b^2+x^2} = (x^2+b^2)^{1/2} = (b^2[1+(\frac{x}{b})^2])^{1/2}$$

$$= \sqrt{b^2+x^2} = [b^2[1+(\frac{x}{b})^2]]^{1/2} = b[1+\frac{1}{2}(\frac{x}{b})^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{x}{b})^4+\dots]^{1/2}$$

$$\therefore (b^2+x^2)^{1/2} = b$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{2T}{b}x \Rightarrow$$

$$T = \frac{\lambda}{a}(\sqrt{b^2+x^2}-a) \Rightarrow T = \frac{\lambda}{a}(b-a)$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{2}{b} \frac{\lambda}{a}(b-a)x$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{-2\lambda(b-a)}{abm}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$



$$= \frac{2V}{g} \quad \#$$

عندما تظهر الطائرة بسرعة ثابتة على ارتفاع  $h$  فإذا ألقينا قذيفة من موقع على الطائرة عندما كان المستقيم الرأسي من الطائرة المربع زمين زاوية  $\alpha$  مع الأفق. أثبت أن الشرط احياة القذيفة للطائرة هو

$$2V(U \cos \alpha - V) + \tan^2 \alpha = gh$$

حيث  $U$  سرعة القذيفة



$x = 3 \cos 5t + 4 \sin 5t$   
 $a = 5$  ,  $T = ?$  ,  $V_{max}$   
 $a = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 12.8$   
 $\omega = 5$  ,  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}$   
 $V_{max} = \pm \omega a = 5 \times 12.8 = \pm 64 \text{ m/sec}$

① سرعت

$T = \pi \text{ sec}$

$\dot{x}|_{x=5} = ?$

$V_{max} = 8 \text{ m/sec}$   
 $a = 5$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$

$V_{max} = 8 = \omega a = 2a \Rightarrow a = 4$   
 $x = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2} = \pm 2 \sqrt{16 - 9} = \pm 2\sqrt{7} \text{ m/sec}$

$V = \frac{100}{60} = \frac{10}{6} \Rightarrow T = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ sec}$

سرعت و (موقع)

$x = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$   
 $\frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.6 \Rightarrow \omega = \frac{10}{3} \pi$

$x = \frac{10}{3} \pi \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{10^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} a \pi = \frac{10^2 \sqrt{3}}{2}$

$a = \frac{9}{2} \pi \text{ m}$

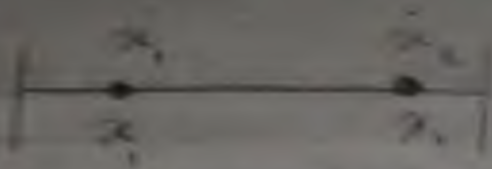
$x_{max} = \omega a = \frac{10^2}{3} \pi \cdot \frac{9}{2} \pi = \frac{15}{2} \pi^2 \text{ m/sec}$

$x = a \sin(\omega t + \epsilon)$

$\dot{x} = a \omega \cos(\omega t + \epsilon)$

$\dot{x}|_{t=\frac{T}{8}} = \frac{15}{2} \pi^2 \cos\left(\frac{10}{3} \pi \cdot \frac{2\pi}{8} + \epsilon\right) = \frac{15}{2} \pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \epsilon\right)$





$$x_1 = w \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

$$x_2 = w \sqrt{a^2 - x_2^2}$$

$$\dot{x}_1^2 = w^2 (a^2 - x_1^2)$$

$$\dot{x}_2^2 = w^2 (a^2 - x_2^2)$$

$$\frac{\dot{x}_1^2}{\dot{x}_2^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2 - x_2^2}$$

مفروضه

$$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = w^2 (a^2 - x_1^2 - a^2 + x_2^2) = 0$$

$$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = w^2 (x_2^2 - x_1^2)$$

$$w = \sqrt{\frac{\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2}{x_2^2 - x_1^2}} \neq T = \frac{2\pi}{w}$$

نتیجه

$$x_1(t-1) \quad x_2(t) \quad x_3(t+1)$$

$$x_1 = A \cos(w(t-1)) + B \sin(w(t-1))$$

$$x_1 = A \cos w t \cos w + A \sin w t \sin w + B \sin w t \cos w - B \cos w t \sin w$$

$$x_2 = A \cos w t + B \sin w t$$

$$x_3 = A \cos(w(t+1)) + B \sin(w(t+1))$$

$$= A \cos w t \cos w - A \sin w t \sin w + B \sin w t \cos w + B \cos w t \sin w$$

$$x_1 + x_3 = \cos w [A \cos w t + B \sin w t] + \cos w [A \cos w t + B \sin w t]$$



$$\therefore x_1 + x_3 = x_2 \cos u + x_2 \cos u = 2x_2 \cos u$$

$$\therefore x_1 + x_3 = 2x_2 \cos u$$

$$\cos u = \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \Rightarrow \cos^{-1} \frac{x_1 + x_3}{2x_2} = u$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\cos^{-1} \frac{x_1 + x_3}{2x_2}} \quad \#$$



### (معاينة 8)

\* الحركة الدائرية :- يوجد نوعان من الحركة الدائرية  
 1) الحركة الدائرية المنتظمة 2) الحركة الدائرية غير المنتظمة  
 3) الحركة الدائرية الزاوية



الزفقية



الزاوية

\* **الحركة الدائرية** :- **الحركة** **موازية** **للمماس** **أو** **الزاوية** **تتكون**

$$\underline{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}$$

هذه المعادلات يتم إستنتاجها من المحاضرة 3



$$r = \text{Constant} = r_0 \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

**السرعة في الحركة الدائرية**

$$\underline{v} = \langle 0, r_0 \dot{\theta} \rangle$$

∴ لا يوجد مركبة للسرعة في اتجاه  $\hat{r}$  وبالتالي السرعة تكون مماسية

$$\underline{a} = \langle (0 - r_0 \dot{\theta}^2), (r_0 \ddot{\theta} + 0) \rangle = \langle -r_0 \dot{\theta}^2, r_0 \ddot{\theta} \rangle$$

ملحوظة :- الوسيط دائما خارج من الدائرة والعكس سالب  
 ∴ أي حافة خطية = فقد  $\alpha$  مقدارها  $\theta$  الزاوية

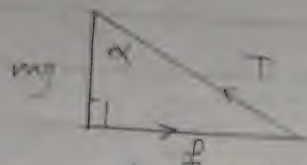
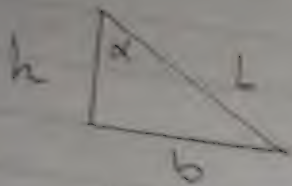
\* **النموذج المزدوج "الحركة الزفقية"**





نعرف أن الزنبر مركزها  $P$  وتثبت وطولها  $L$  و  $h$  بعد الكتلة عن المستوى التعلق  $\alpha$  بعد زاوية بين القبلات المود

let  $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$   
 وعند لحظة  $t$  كانت هذه هي البيانات فيما هي معادلات الحركة و الزنبر الدوري  
 من الرسم



من تشابه مثلثات القوى والهندسة

$$\frac{h}{mg} = \frac{b}{f} = \frac{L}{T}$$

$$\underline{V} = \langle 0, b\dot{\theta} \rangle = \langle 0, b\omega \rangle$$

$$\underline{a} = \langle -b\dot{\theta}^2, b\ddot{\theta} \rangle = \langle -b\omega^2, 0 \rangle$$

القوى التي في المستوى العمودي متزنة

$$\therefore mg = T \cos \alpha$$

القوى المسببة للحركة في القوى الأفقية

$$\therefore m a_r = -f \Rightarrow f = +m b \omega^2$$

$$\therefore \frac{T}{L} = \frac{f}{b} = \frac{+m b \omega^2}{b} \Rightarrow T = +m L \omega^2$$

$$\therefore \frac{h}{mg} \left( \frac{m L \omega^2}{L} \right) \Rightarrow h = \frac{g}{\omega^2}$$

بعد الكتلة عن نقطة التعلق يتناسب عكسيا مع  $\omega^2$

مربع السرعة الزاوية

$$\therefore \omega^2 = \frac{g}{h} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$



## المركبة في الدائرة

مماثلة ٩

نوضح المركبة في الدائرة:  $\hat{e}_r$  المركبة الشعاعية  $\hat{e}_\theta$  المركبة الزاوية

للمركبة في دائرة أفقية: (البعدون للمعزولين)

من البعدون للمعزولين



$$\dot{r} = 0, \dot{\theta} = \omega$$

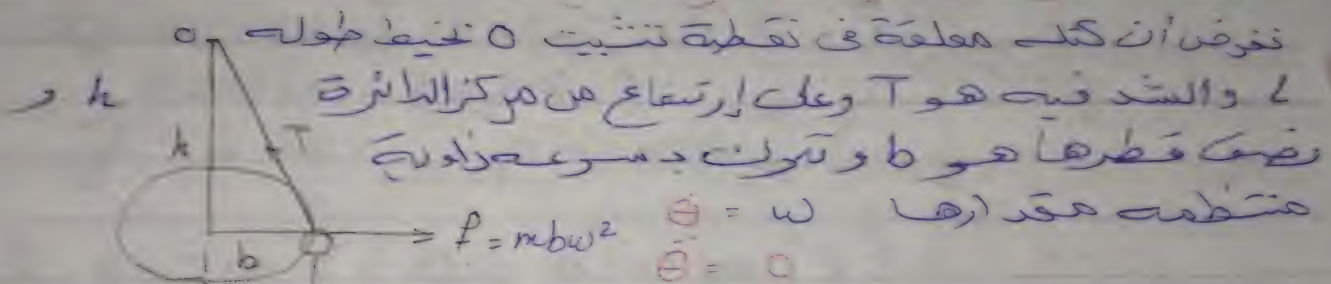
$$\vec{v} = \langle \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \rangle = \langle 0 + r\omega\hat{e}_\theta \rangle$$

$$r = \text{Constant} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

المركبة في دائرة أفقية

$$\vec{a} = \langle \ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r \rangle = \langle 0 + 0 + 0 - r\omega^2\hat{e}_r \rangle$$

معادلات المركبة في الحركة في دائرة أفقية



الجسم أثناء الحركة في دائرة أفقية تحت قوة  $mg$  طارده من مركزية مقدارها هو  $F$

الحركة تكون حركة مماسية فقط لأن مركبة السرعة القطرية تساوي صفر فإن الحركة تكون مماسية

الحركة القطرية تكون متزن

من نيوتن الثاني

$$F_r = m a_r = -F = -m b \omega^2 = m b \omega^2$$

الجسم يقع تحت تأثير ثلاث قوى (متزن)

من القوة

$$\frac{F}{b} = \frac{m g}{h} = \frac{T}{b} = m \omega^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow h \propto \frac{1}{\omega^2}, \quad \omega^2 = \frac{g}{h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$



$$T = m\omega^2 r$$

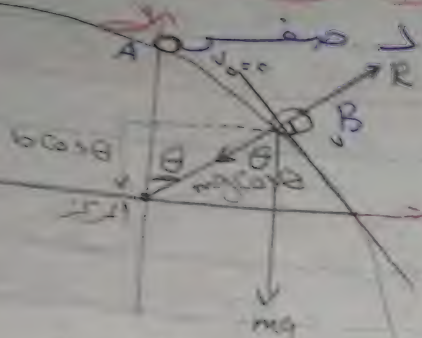


③ القوة الطاردة المركزية -  
الحركة على الدائرة متساوية السرعة

وصف الحركة: - الجسم يتحرك على الدائرة  
قرن من الزمن ولكن  $\Delta t$  تم تحريك  $\Delta s$  مقدار

السؤال: متى يتحرك الجسم الحركة على الدائرة وتترك كمنفذ

عندما يكون رد الفعل مساوياً لـ صفر  
معادلات الحركة عند زمن  $t$   
:- الحركة متزن قطرياً، من حيث التوازن



$$\therefore F_r = ma_r = R - mg \cos \theta$$

$$mg \sin \theta = a_r = -v\dot{\theta} = -\frac{v^2}{b}$$

$$\therefore -\frac{m}{b} v^2 = R - mg \cos \theta \Rightarrow \frac{m}{b} v^2 = mg \cos \theta - R \quad (1)$$

من هذا نستنتج الطاقة

$$K_A + P_A = K_B + P_B \Rightarrow 0 + mgb = \frac{1}{2}mv^2 + mgb \cos \theta$$

$$gb = \frac{1}{2}v^2 + gb \cos \theta \Rightarrow v^2 = 2gb - gb \cos \theta$$

نضرب في  $\frac{m}{b}$

$$\frac{m}{b} v^2 = 2mg - 2mg \cos \theta \Rightarrow \frac{m}{b} v^2 = 2mg(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

من 1 و 2 يتبع أن

$$mg \cos \theta - R = 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$mg \cos \theta - R = 2mg - 2mg \cos \theta$$

$$\therefore 3mg \cos \theta - 2mg = R = mg(3 \cos \theta - 2) \quad \#$$

عندما يتحرك الجسم التعلق دائرة  $R=0$

$R=0$

$$\therefore 0 = mg(3 \cos \theta - 2) \Rightarrow 3 \cos \theta - 2 = 0$$

because  $mg \neq 0$

$$\therefore 3 \cos \theta = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{2}{3}$$



الجسم قبل أن يهبط يكون عند مسأله  $\frac{2}{3}$  كـ  $\cos \theta$  ويكون  
سرعة جسمه  $u$  عند مسأله  $\theta$

$$\frac{mv^2}{b} = 2mg(1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{v^2}{b} = 2g(1 - \cos \theta)$$

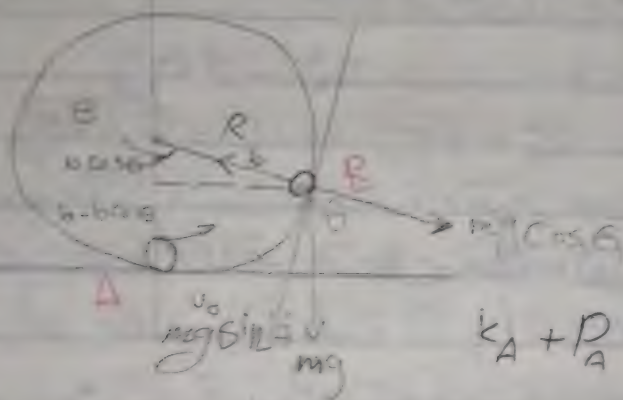
$$v^2 = 2bg(1 - \cos \theta)$$

$$\therefore v^2 \Big|_{\theta = \cos^{-1} \frac{2}{3}} = 2bg(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}bg$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2}{3}bg}$$

④ الحركة الرأسية ولكن من الداخل

وصف الحركة :- الجسم يتحرك على السطح الداخلي للدائرة يتم تحريكه  
حركته توافقية بسيطة



مصادرات الحركة

من مبدأ الحفظ للطاقة

$$K_A + P_A = K_B + P_B$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + b(1 - \cos \theta)mg$$

$$v^2 = v_0^2 - 2bg(1 - \cos \theta) \quad ①$$

من قانون التفاضل (الجدول خطية)

الجسم متحرك على المقام

$$-\frac{m}{b}v^2 = mg \cos \theta - R \quad ②$$

من ① ينتج أن

$$-\frac{m}{b}[v_0^2 - 2bg(1 - \cos \theta)] = mg \cos \theta - R$$

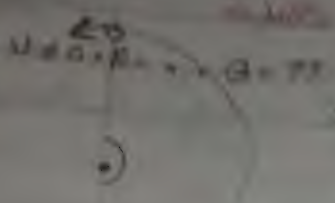
$$\therefore R = \frac{mv_0^2}{b} - 2mg + 3mg \cos \theta$$

$$\therefore R = m \frac{v_0}{b} + mg(3 \cos \theta - 2)$$

ملاحظة أن  $R \cdot v > 0$  دائما أثناء الحركة



أعلى سرعة الجسم في هذا الموضع تكون عند  
المركز



$$R=0, \theta=\pi$$

$$L = \frac{m}{b} U_0^2 + mg(3\cos\theta - 2)$$

$$0 = \frac{m}{b} U_0^2 + mg(-3 - 2)$$

$$0 = \frac{m}{b} U_0^2 - 5mg$$

$$\frac{m}{b} U_0^2 = 5mg \Rightarrow U_0^2 = 5bg \Rightarrow U_0 = \sqrt{5bg}$$

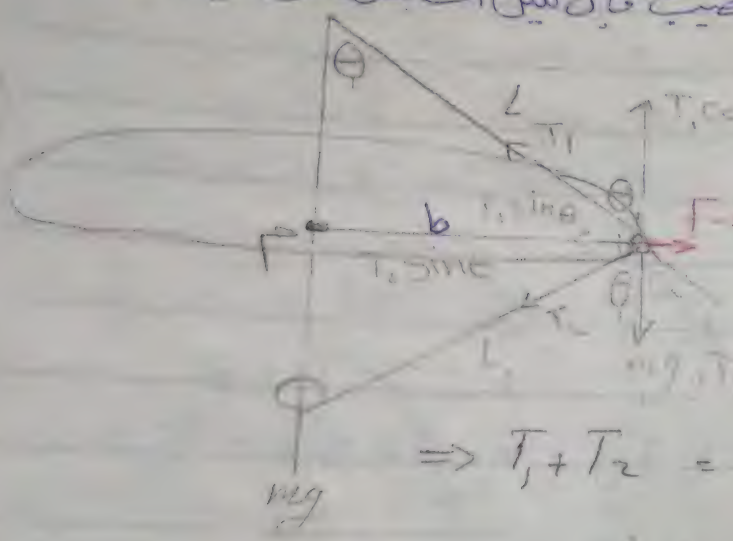
أعلى سرعة الجسم بعد أن يترك النقطة ويسقط  
المركز

$$U^2 = U_0^2 - 2bg(1 - \cos\theta)$$

$$U^2 = U_0^2 - 2bg(1 - (-1)) = U_0^2 - 4bg$$

$$0 = U_0^2 - 4bg \Rightarrow U_0^2 = 4bg \Rightarrow U_0 = 2\sqrt{bg}$$

مثال: جسم ثقيل مثبت بفتحة خيط طوله 2L وإحدى طرفي الخيط مثبتة  
بقطبة O والطرف الآخر متطوّل خلفه (أي نفس كتلة الجسم) وتترك على  
قضيب رأس مار بالقطبة O. أثبت أنه إذا تحرك الجسم في مستوى  
أفقية بسرعة زاوية ثابتة له حول القضيب فإن ميل أي جزء من الخيط على  
الرأس يساوي  $\cos^{-1}\left(\frac{3g}{L\omega^2}\right)$



$$\cos^{-1}\left(\frac{3g}{L\omega^2}\right)$$

الحركة متروكة على الخيط

$$F_{\text{net}} = ma_r = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta$$

$$mb\omega^2 = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta$$

$$= \sin\theta (T_1 + T_2)$$

$$\Rightarrow T_1 + T_2 = \frac{mb\omega^2}{\sin\theta} \quad (1)$$

في الموضع الرأس الحركة متروكة

$$T_1 \cos\theta = mg + T_2 \cos\theta \Rightarrow mg = T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta$$

$$mg = (T_1 - T_2) \cos\theta$$

طرح المعادلتين

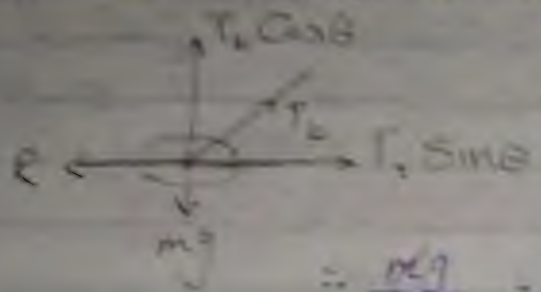
$$2T_2 = \frac{mb\omega^2}{\sin\theta} - \frac{mg}{\cos\theta}$$



في  $L \sin \theta$

$$= 2T_2 = \frac{m L \omega^2 \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{mg}{\cos \theta} \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{2} \left( L \omega^2 - \frac{g}{\cos \theta} \right)$$

الحقيقة: عند الب توازن يكون الشد في الخيط متساويين في الاتجاه الشد المتساوي



$$T_2 \sin \theta = R \Rightarrow T_2 \cos \theta = mg$$

$$T_2 = \frac{mg}{\cos \theta} \Rightarrow 4$$

بمعادلة 3 و 4

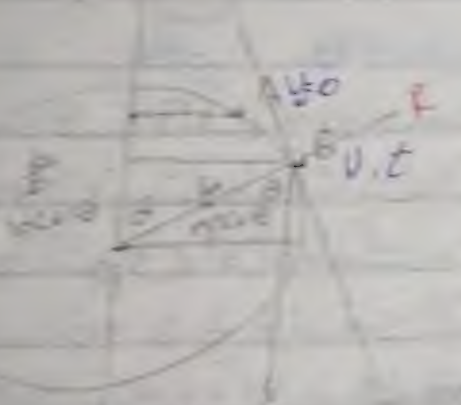
$$\frac{mg}{\cos \theta} = \frac{mg}{2} \left( L \omega^2 - \frac{g}{\cos \theta} \right)$$

$$-\frac{g}{\cos \theta} = \frac{L \omega^2}{2} - \frac{g}{2 \cos \theta} \Rightarrow \frac{g}{\cos \theta} = \frac{g}{2 \cos \theta} - \frac{L \omega^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{g}{\cos \theta} = \frac{L \omega^2}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{3g}{L \omega^2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{3g}{L \omega^2} \quad \#$$

مثال ٤: ينزلق جسم من سكون على عتق  $\frac{b}{2}$  من أعلى نقطة في دائرة هلياء ثابتة نصف قطرها  $b$ . اثبت أن الجسم يترك سطح الدائرة عند ارتفاع  $\frac{b}{3}$  أعلى مركز الدائرة. اثبت أنه عندما يكون الجسم على بعد  $2b$  من القطر الرأس للدائرة فإنه يكون على عتق  $\frac{b}{4}$  أسفل مركز الدائرة



من مبدأ حفظ الطاقة

$$K_A + P_A = K_B + P_B$$

$$0 + mg \frac{b}{2} = \frac{1}{2} m v^2 + mg b \cos \theta$$

$$v^2 = bg - 2gb \cos \theta = bg(1 - 2 \cos \theta)$$

المركبة ممثلة على العتق

$$\therefore F_r = m \frac{v^2}{b} = R - mg \cos \theta$$

$$R = mg \cos \theta - \frac{v^2}{b} m \Rightarrow R = mg \cos \theta - \frac{m}{b} [gb(1 - 2 \cos \theta)]$$

$$= mg \cos \theta + 2mg \cos \theta - mg = mg(3 \cos \theta - 1)$$

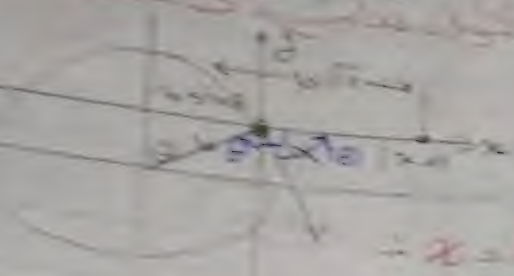


P. 5

الجسم يتحرك لمسار دائري في حقل جاذبية  
 $\frac{1}{3} = \cos \theta$   $\Rightarrow \theta = 60^\circ$   $\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3}$   $\Rightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

الارتفاع  $h = b \cos \theta = \frac{b}{3}$   
 بعد من المحور الأساسي  $\frac{b}{3}$   
 الموجه عند  $\theta$

الموجه الموازي الجسم على الدائرة كجاذبية  $\Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{v^2}{g}$   
 $\Rightarrow v^2 = \frac{gb}{3}$



$$x = b \sin \theta = b \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow x = b \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}b}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \theta$$

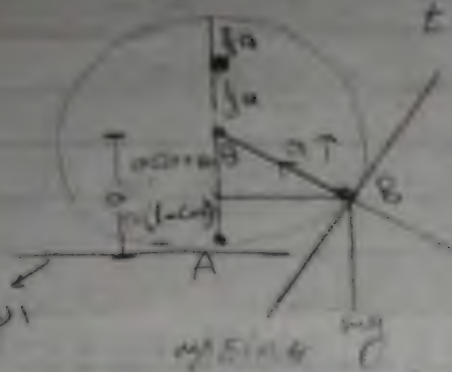
$$y = -\frac{b \sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v^2 \cos^2(\theta)}$$

$$y = -\frac{4b}{3} - 3b = -\frac{13}{3}b$$

الارتفاع العمودي تحت نقطة الأصل (أسفل)  
 $y = -\frac{13}{3}b - \frac{b}{3} = -4b$   
 ضلعة تتدلى كتلة من أحد طرفي خيط غير من طوله  $a$  ويتصل  
 طرفه الآخر بنقطة ثابتة  $O$ . فإذا ثبت قضيب في وضع أفقي عمودياً  
 على مستوى الحركة للكتلة  $m$  عند نقطة تقع رأسيًا أعلى  $O$  وتبعد  
 عن  $O$  مسافة  $\frac{1}{2}a$  وقضيب الكتلة بسرعة سيارية  $v_0$  كل أرض بالنسبة  
 بين الشدين في الخيط عندما يلحق الخيط القضيب لأول مرة عند ما  
 يصنع تلك منازاوية  $\frac{\pi}{3}$  مع الرأس. أوجد أيضا النسبة بين  
 سرعتي الكتلة عند هذين الوضعين.



المالك الداهي قبل تأسيس القنصلية عند طرابلس



عثرنا على البقاء القطري

$$\therefore m \left( \frac{v^2}{r} \right) = T - mg \cos \theta$$

$$-\frac{1}{2}mv^2 - mgy \cos \theta = 0$$

بسم الله الرحمن الرحيم

$$K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + m g (0) = \frac{1}{2} m v^2 + m g a (1 - \cos 60^\circ)$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} v^2 + ag(l - l \cos \theta) \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2ag(l - l \cos \theta)$$

$$\therefore U^2 = U_0^2 - 2ag(C1 - \cos\theta)$$

$$V_0 = \sqrt{604} \quad \text{at } 20^\circ \text{C}$$

$$v^2 = 6ag - 2ag(1 - \cos\theta) = 2ag(3 - 1 + \cos\theta)$$

$$v^2 = 2ag(2 + \cos\theta) \Rightarrow (2)$$

سالمونش کیم ۲

$$\frac{m}{2} (2g(2 + \cos\theta)) = T - mg \cos\theta$$

$$2m_g(2 + \cos\theta) + m_g \cos\theta = T$$

$$mg(2(2+\cos\theta) + \cos\theta) = T \Rightarrow T = mg(4 + 3\cos\theta) \Rightarrow \textcircled{3}$$

المطابق :- النسبة بين الشددين عند الزاوية  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore U|_{\theta = \frac{\pi}{3}} \Rightarrow v^2 = 2ag(2 + \cos 60) = 5ag \Rightarrow v = \sqrt{5ag}$$

$$T|_{\theta=\frac{\pi}{3}} \Rightarrow T = mg(4 + 3\cos 60) = \frac{11}{2} mg$$

عند ما ينحني الخط القضي بنفس الخط حول القوس و يدور الجسم في

سرکه دانه‌ایه مرکزها القوی و سرعتی به سیرابی و سرعتی

الجسم النابذة في الماء الأول عند  $\theta = \pi$

$$(V_{net})_1 = (V_0)_2 \Rightarrow \left. U^2 \right|_{\theta=\pi} = 2ag(2 + \cos(\pi)) = \frac{8}{3} ag$$



$$\frac{1}{2} \frac{3m}{2a} (U^2) = T + mg \cos \theta$$

$$\frac{3m}{2a} (U^2) = T + mg \cos \theta \quad \text{--- (1)}$$

$$K_2 + P_2 = K_3 + P_3 = \frac{1}{2} m U_0^2 + mg \frac{2}{3} a = \frac{1}{2} m U^2 + mg \frac{2}{3} a \cos \theta$$

$$U_0^2 + \frac{4ag}{3} = U^2 + \frac{4ag}{3} \cos \theta$$

$$U^2 = U_0^2 + \frac{4ag}{3} (1 - \cos \theta) \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{3m}{2a} (U_0^2 + \frac{4ag}{3} (1 - \cos \theta)) = T + mg \cos \theta$$

$$\frac{3m}{2a} U_0^2 + 2mg (1 - \cos \theta) - mg \cos \theta = T$$

$$\frac{3m}{2a} (2ag) + 2mg - 2mg \cos \theta - mg \cos \theta = T \quad U_0 = \sqrt{2ag}$$

$$3mg - 2mg - 3mg \cos \theta = T \Rightarrow T = 5mg - 3mg \cos \theta$$

$$U^2 \Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = U_0^2 + \frac{4ag}{3} \cos \theta$$

$$= 2ag + \frac{4ag}{3} \cos 60 = \frac{8}{3} ag \Rightarrow U = \frac{2\sqrt{6ag}}{3}$$

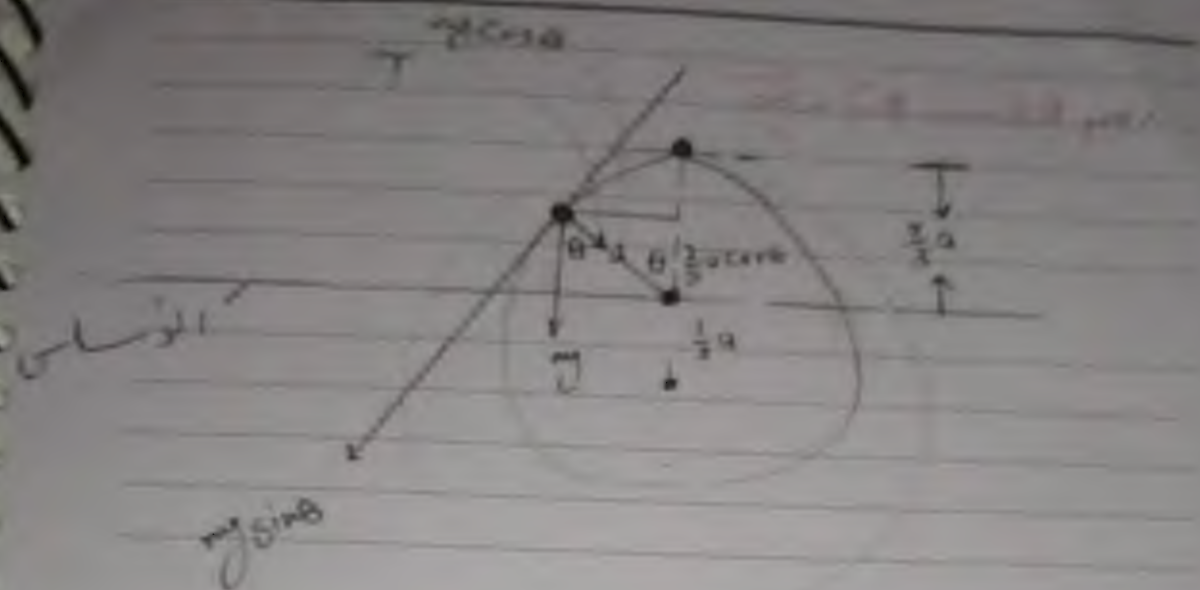
$$T \Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = 5mg - 3mg \cos 60 = 5mg - \frac{3}{2} mg = \frac{7}{2} mg$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{11}{2} mg}{\frac{7}{2} mg} = \frac{11}{7}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sqrt{5ag}}{\frac{2}{3}\sqrt{6ag}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}$$



## *Index*



## Notes

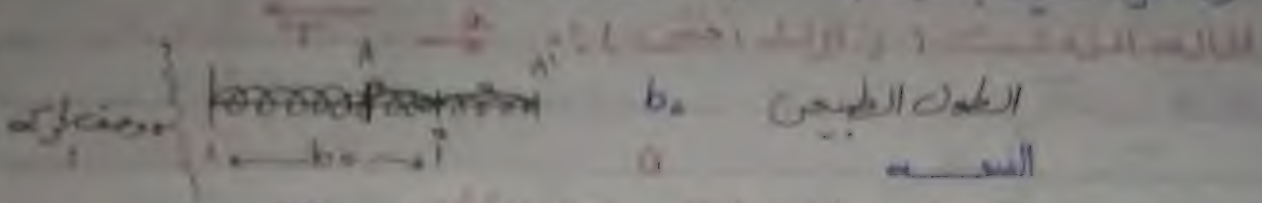




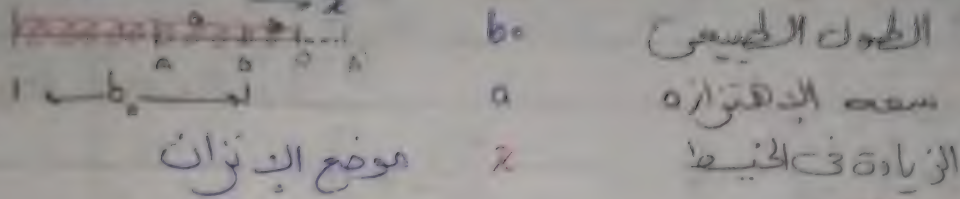
(معادلة رقم 1)

مركبة توافقية بسيطة - أم حركتان توافقيتان رقم 9

حركة توافقية بسيطة (نقش في الكتاب)



عند موضع ثابت / ثابت للزمن لها بالمعادلة



معادلات الحركة

من يونين الثاني

مع قانون الحركة

$$m\ddot{x} = -T \quad (1)$$

الطول يدراس - الطول الطبيعي  $T \propto$   
الطول الطبيعي

$$-T \propto (b_0 + x) - b_0 \Rightarrow T \propto x \Rightarrow T = \frac{\lambda}{b_0} x \quad (2)$$

حيث  $\lambda$  هو ثابت التناسب ويعبر عنه بمعامل المرونة  
والمقدار  $\frac{\lambda}{b_0}$  يعرف بـ ثابت الزنبرك (ثابت هوك) وبالتالي يكون  
القانون عبارة عن (تناسب الشرع الزيادة في الخيط ويكون الثابت  $(\frac{\lambda}{b_0})$ )

من 2 نتج أن

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mb_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

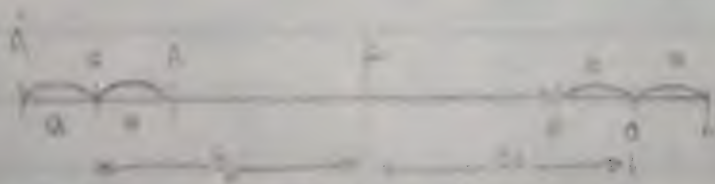
حيث  $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$

الحركة مركبة توافقية بسيطة وزمنها الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$$

الحالة الثانية (خيط مرن)

x وحت الحركة



الجسم يترك حركته توافقية من A - A ثم حركته مستقيمة من A -> K  
نتيجة مرونة الخيط

طول A.A' = 0 الحركة المرونة 0 الحركة الطبيعية  $b_0$

السعة a





حتمية

$$m \ddot{x} = -T$$

$$T = \frac{\lambda}{b_0} x$$

$$-m \ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\lambda}{mb_0} x \Rightarrow \ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\omega = \frac{\lambda}{mb_0}$$

موجات

حتمية

$$T = 2 \left[ t_{A' \rightarrow 0} + t_{0 \rightarrow 0'} + t_{0 \rightarrow A'} \right]$$

$$t_{A' \rightarrow 0} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} \Rightarrow t_{A' \rightarrow 0} = t_{0 \rightarrow A'} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$$

$$t_{0 \rightarrow 0} = \frac{\text{الزمن}}{\text{السرعة}}$$

الزمن المستغرق من 0 إلى 0' ،  
السرعة =  $2b_0$  ، الزمن

$$v_{max} = \omega a = a \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$$

$$\therefore t_{0 \rightarrow 0'} = \frac{2b_0}{a \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}} = \frac{2b_0}{a} \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$$

$$\therefore T = 2 \left[ \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} + \frac{2b_0}{a} \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} \right]$$

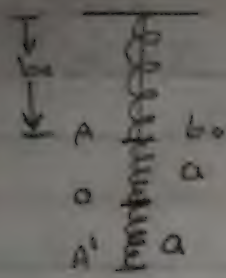
$$= 2 \sqrt{\frac{b_0 m}{\lambda}} \left[ \pi + \frac{2b_0}{a} \right]$$

في الحركة التوافقية البسيطة الدقيقة

لا تظهر الاستطالة البسيطة

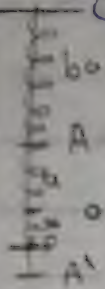


الحالة الثالثة :- (دولك رأست)



وضعت المركبة - عملت قوة الورد على  
استطال الزنبرك بمقدار 'a' ثم انزلت انزلت  
إستاتيكيه تم عند خروجه حركة ديناميكيه  
تأثير وزنه تمرك حركة توافق بسطه مركزها 0  
وطرفي الحركة A, A'

عند لحظة t كان الجسم على مسافة (x+a) من  $b_0$   
حيث يكون مقدار الزيادة في الحيط أقل من 2a



$$mg = T_0$$

$$T_0 = \frac{\lambda}{b_0} a$$

$$\therefore mg = \frac{\lambda}{b_0} a \Rightarrow a = \frac{mg b_0}{\lambda} \quad (1)$$

في الحالة الديناميكية

من قانون التوافق

من قانون هوك

من قانون التوافق

من قانون هوك

$$m\ddot{x} = -T + mg$$

$$T = \frac{\lambda}{b_0} (x+a)$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} (x+a) + mg \Rightarrow (2)$$

من قانون التوافق

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} \left( x + \frac{mg b_0}{\lambda} \right) + mg \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x + \cancel{mg} - \cancel{mg}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0 m} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{b_0 m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m b_0}{\lambda}}$$

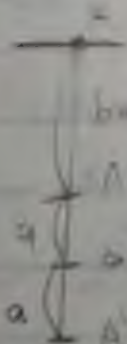
الحالة الرابعة :- (دولك رأست)

(9) دولك رأست : يسقط تحت تأثير وزنه فقط

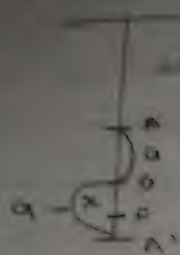
استطال بمقدارها 'a' ثم يسكن سكون لحظي (إستاتيكي)

ثم تمرك حركة توافق بسطه حيث يكون

طرفي الحركة A, A' ومركزها 0







عند لحظة  $t$  حيث يكون الوتر ممتد في الموضع  $k < 2a$   
 $b_0 > a$

\* حالة الإستاتيكية

$$mg = T_0, T_0 = \frac{\lambda}{b_0} a$$

$$mg = \frac{\lambda}{b_0} a \Rightarrow a = \frac{mg b_0}{\lambda} \Rightarrow 0$$

\* في حالة الديناميكية

$$m\ddot{x} = -T + mg, T = \frac{\lambda}{b_0} (x + a)$$

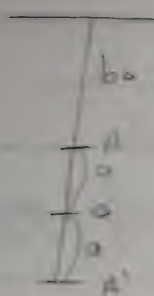
$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} (x + a) + mg \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} (x + \frac{mg b_0}{\lambda}) + mg$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x - mg + mg \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mb_0} x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$$

الحالة الخامسة: - (مخطط هرون أو ليفرث) يتم شدده بمسافة  $k$  من حوافه  
 الطول الطبيعي للمرور  $k < 2a$

\* وصف الحركة: - الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة  
 مركزها هو  $O$  وموضع الحركة  $AA'$  وسعته  $a$



\* عند لحظة  $t$  فإن الوتر ممتد في الموضع  $k = (x + a)$  و  $k < 2a$   
 \* في حالة الديناميكية

$$mg = T_0, T_0 = \frac{\lambda}{b_0} a$$

$$mg = \frac{\lambda}{b_0} a \Rightarrow a = \frac{mg b_0}{\lambda} \Rightarrow 0$$

\* في حالة الديناميكية

$$m\ddot{x} = mg - T \Rightarrow T = \frac{\lambda}{b_0} (x + a) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{b_0} (x + a)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{b_0} (x + \frac{mg b_0}{\lambda}) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{b_0} x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mb_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} \neq$$



في الفيزياء الحديثة، حيث لا توجد مسافة  
أو انحناء المسار حيث  $h > 2\pi\lambda$   
في حركته المركبة وهو أكثر من المحاضرة السابقة

مسائل على الحائط المائبة

معاقرة II

نأخذ نابولاً خفيف طوله الطبيعي  $L$  ومعامل مرونته  $\lambda$  مثبت أحد طرفيه  
في نقطة مع منضدة أفقية ملساء وفي الطرف الآخر كتلة مقدارها  $m$  فإذا  
أزججه الكتلة مسافة  $x$  ثم تركت أثبت أن الكتلة تنقلب حركته توافق  
بسيطة وأوجد زمنها الدوري.



حيث النكاح، يصفه نابولاً  
 $m\ddot{x} = -T$

مما يتولد التناقص  
من التردد

$$T = \frac{\lambda}{L} x$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{L} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mL} x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x \text{ و } \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}} \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

مثال 3: خيط مرن طوله الطبيعي  $L$  ومعامل مرونته  $\lambda$  مثبت في نقطة على  
منضدة أفقية ملساء وفي الطرف الآخر نقط مادة كتلتها  $m$  أزججه النقط  
المادية مسافة  $x$  ثم تركت لتتحرك أوجد الزمن الدوري



$$m\ddot{x} = -T$$

من يتولد التناقص

$$T = \frac{\lambda}{L} x$$

من التردد

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{L} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mL} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \text{ و } \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

لمعرفة الزمن جثا الحركة لأنه عند ما يصل طول الخيط إلى الطول  
الطبيعي ينعدم الشد وتتحرك حركه منتظمة بسرعة  
 $v_{max}$

$$T = 2L [T_{0 \rightarrow A} + T_{0 \rightarrow 0} + T_{0 \rightarrow A}]$$

$$T_{0 \rightarrow A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} \pi / \sqrt{\frac{\lambda}{mL}} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

$$T_{0 \rightarrow A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$



$$T_{\text{الزمن}} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{2L}{v_{\text{max}}} \quad \bullet \quad v_{\text{max}} = \omega a$$

$$= v_{\text{max}} = a \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

من قوانين الحركة التوافقية بسيطة

$$= T_{\text{الزمن}} = \frac{2L}{a} \sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

$$T = 2 \left[ \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}} + \frac{2L}{a} \sqrt{\frac{mL}{\lambda}} + \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}} \right]$$

$$= T = 2 \sqrt{\frac{mL}{\lambda}} \left[ \pi + \frac{2L}{a} \right]$$

١٣ خط من خفيف طوله الطبيعي  $L$  وموصل مرونته  $\lambda$  علق رأسيًا من أحد طرفيه وبطرفه الآخر جسم كتلته  $m$  وتلك ليست من نهاية طوله الطبيعي أثبت أنه يترك حركته توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدوري

عندما علقنا الخط  $m$  رأسيًا استطاعنا اشتقاق

$$mg = T_0 \quad \bullet \quad T_0 = \frac{\lambda}{2} a$$

$$\therefore mg = \frac{\lambda}{2} a \Rightarrow a = \frac{mgL}{\lambda}$$

وعندما تركت ليست من نهاية الطول الطبيعي استطاعنا اشتقاق

$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$\bullet \quad T = \frac{\lambda}{2}(a+x)$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{2}(a+x) \quad \bullet \quad m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{mgL}{\lambda} + x\right)$$

$$m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{2}x = 0 \quad \bullet \quad m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{2}x$$

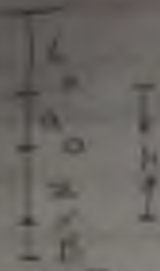
$$\therefore \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mL}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \bullet \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

ملحوظة في الزنبرك الحركي تكون توافقيه بسيطة دائمًا.

١٤ خط من خفيف طوله الطبيعي  $L$  وموصل مرونته  $\lambda$  علق رأسيًا من طرفه العلوي وثبت بطرفه السفلي جسم كتلته  $m$  وإستداد الحركه من السكون من موضع بعد  $h$  أسفل نقطة التوازن الطبيعي أثبت أن الحركه توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدوري





$$mg = T_0 \quad T_0 = \frac{\lambda}{L} a$$

$$mg = \frac{\lambda}{L} a \Rightarrow a = \frac{mgL}{\lambda}$$

$$m\ddot{x} = mg - T \quad T = \frac{\lambda}{L} (a+x)$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L} (a+x) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L} \left( \frac{mgL}{\lambda} + x \right)$$

$$m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{L} x \Rightarrow m\ddot{x} = - \frac{\lambda}{L} x$$

$$\ddot{x} = - \frac{\lambda}{mL} x \Rightarrow \ddot{x} = - \omega^2 x \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

في حالة  $h > 2a$  تكون سلك الحركة

دفعه ان نصفه  $t$  كانت الباشه  $x$   $d = h - a$

في حالة الشد الباشه



$$mg = T_0 \quad T_0 = \frac{\lambda}{L} a$$

$$mg = \frac{\lambda}{L} a \Rightarrow a = \frac{mgL}{\lambda}$$

في حالة الشد الباشه

$$m\ddot{x} = mg - T \quad T = \frac{\lambda}{L} (a+x)$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L} (a+x) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L} \left( \frac{mgL}{\lambda} + x \right)$$

$$m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{L} x \Rightarrow m\ddot{x} = - \frac{\lambda}{L} x \Rightarrow \ddot{x} = - \frac{\lambda}{mL} x$$

$$\ddot{x} = - \omega^2 x \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

في الحركة توافق  $h > a$   $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$

لعرفة الزمن خيرا الحركة لان الجسم عند ما يكون طول الحيط المساوي لطوله الطبيعي نعدم الشد ونتركه كعقد زفير رأسي

$$T = 2 [T_{A' \rightarrow A} + T_{\text{مفتوح}}]$$

$$T_{A' \rightarrow A}$$

لا يمكن معرفة زمن التوافق الى ان الجسم المعلق بين  $x \neq \pm$

لذلك السطح البست  $a$  ولكن السطح  $d = h - a$

$$x = d \sin(\omega t + \epsilon)$$

عند ما  $x = d$  كانت  $t = 0$

$$d = d \sin(\epsilon) \Rightarrow 1 = \sin \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{\pi}{2}$$



$$\therefore x = d \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$x = d \cos(\omega t)$$

وعندما كانت  $t = t'$  كان  $x = -a$

$$-a = d \cos(\omega t')$$

$$\frac{-a}{d} = \cos(\omega t') \Rightarrow \omega t' = \cos^{-1} \frac{-a}{d}$$

$$\omega t' = \pi - \cos^{-1} \frac{a}{d}$$

$$\therefore t' = \frac{1}{\omega} [\pi - \cos^{-1} \frac{a}{d}]$$

cos

$$\frac{T}{\text{كتلة}} = \frac{U \sin \alpha}{g} = \frac{U}{g} \quad d = \frac{\pi}{2}$$

من قوانين الحركة التوافقية البسيطة  $(v = \omega \sqrt{d^2 - x^2})$    
  $U = \omega \sqrt{d^2 - a^2}$    
  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{T}{\text{كتلة}} = \frac{\omega}{g} \sqrt{d^2 - a^2}$$

$$\therefore T = 2 \left[ \omega \left( \pi - \cos^{-1} \frac{a}{d} \right) + \omega \sqrt{d^2 - a^2} \right]$$

$$= 2\omega \left[ \left( \pi - \cos^{-1} \frac{a}{d} \right) + \sqrt{d^2 - a^2} \right]$$

مثال 5 جسيم كتلته  $m$  معلق بطرف خيط من طرفه الأخر مثبت ومقابل مرونته يساوي وزن الجسم. إذا سحب الخيط رأسيًا لأسفل حيث كان طوله يساوي أربعة أمثال طوله الطبيعي ثم تركه أثبت أن الجسيم سوف يعود لهذه النقطة لأول مرة بعد زمن مقداره  $(2\sqrt{3} + 4\frac{\pi}{3}) \sqrt{\frac{a}{g}}$  حيث  $a$  الطول الطبيعي للخيط.

في حالة الشد العظمى

$$mg = T_0 \Rightarrow T_0 = \frac{\lambda}{a} b$$

$$mg = \frac{\lambda}{a} b \Rightarrow b = \frac{mga}{\lambda} \quad \lambda = mg$$

$$\therefore b = a$$

في حالة الشد الدائم

$$m\ddot{x} = mg - T \quad T = \frac{\lambda}{a} (x + a) = \frac{\lambda}{a} (x + a)$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a} (x + a) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{a} x$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{a} x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{ma} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{ma}} = \sqrt{\frac{mg}{ma}} = \sqrt{\frac{g}{a}}$$



المسار:  $A \rightarrow B$  حركة توافقية بسيطة، ثم العكس  $B \rightarrow A$  حركة توافقية بسيطة، وإذا كان  $a$  نصف المسار  $A \rightarrow B$   $x$   $t$

$$T = 2 [ t_{B \rightarrow A} + t_{A \rightarrow B} ]$$

لحركة  $t_{B \rightarrow A}$  لا يمكن معرفتها إلا عن طريق علاقة بين  $x$  و  $t$  لأن الحركة توافقية بسيطة  $2a$  وليس  $a$

$$\therefore x = 2a \sin(\omega t + \epsilon)$$

$$x = 2a \quad \text{عند } t = 0$$

$$\therefore 2a = 2a \sin(\epsilon) \Rightarrow \epsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2a \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = 2a \cos \omega t$$

$$x = -a \quad \text{عند } t = t_{B \rightarrow A}$$

$$\therefore -a = 2a \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \omega t_{B \rightarrow A} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_{B \rightarrow A} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$t = \frac{L \sin \alpha}{g} = \frac{U_0}{g} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$U_0 = \omega \sqrt{4a^2 - a^2} = \omega a \sqrt{3} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot a \sqrt{3} = \sqrt{3ag}$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{3ag}}{g} = \sqrt{\frac{3a}{g}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{3}$$

$$\therefore T = 2 \left[ \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{a}{g}} + \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{3} \right] = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right] \neq$$

(التصادم)

الدفع: - قوى عظمى في فترة زمنية قصيرة أو العكس كمية الحركة

$$I = \int_0^{\Delta t} F dt$$

$$F = mg = m \frac{dV}{dt}$$

$$\therefore I = \int_0^{\Delta t} m \cdot \left( \frac{dV}{dt} \right) dt = m \int_{V_0}^{V_1} dV$$

$$I = m [V]_{V_0}^{V_1} = mV_1 - mV_0$$



الذراع العظمى.

$$J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} f \cdot dt$$

قانون نيوتن التجريبي:-

$$e = \frac{\text{الرم النسبي بعد التصادم}}{\text{السرعة النسبية قبل التصادم}}$$

حيث  $e$  معامل الارتداد  $0 < e < 1$

سؤال: لماذا لم يتح الغلاف الجوي؟ - أولك الغلاف الجوي عبارة عن

غازات تتحرك حركة عشوائية فيتصدم بعضها البعض وبالتالي تفقد طاقتها  
ثم تسقط وهذا لم يحدث لأن معامل المرونة لها مساوي للواحد

الحركة المدارية

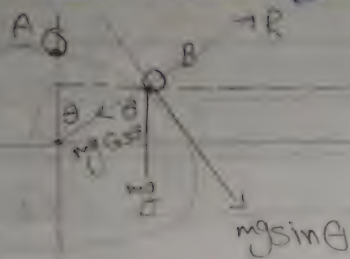
سكشن 7



# الحركة الدائرية

## مسئله 8

يؤد نقطه ماديه الحركه من السكون من اعلى نقطه على سطح كرهه ملسه نصف قطرها  $a$  ارضه الموضع الذي تترك النقطه للماديه سطح الدائره واذا تحركت النقطه للماديه كعقدوف أثبت أنه عندما يتكون النقطه على مسافه  $\sqrt{5}a$  من القطر الرئيس يكون عمقها أسفل أسفل نقطه من الدائره مسافه  $\frac{15a}{4}$



$$\frac{mv^2}{a} = mg \cos \theta - R$$

من سيوتى الثاني  
من هذا ثبوت الطاقة

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + mga = \frac{1}{2}mv^2 + mga \cos \theta$$

$$2mga - 2mga \cos \theta = mv^2 \Rightarrow mv^2 = 2mga(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

بالتعويض من 2 في 1

$$2mg - 2mg \cos \theta = mg \cos \theta - R$$

$$R = mg \cos \theta + 2mg \cos \theta - 2mg = 3mg \cos \theta - 2mg$$

$$R = mg(3 \cos \theta - 2)$$

الجسم تترك الحركه الدائريه وفتره كعقدوف عندما  $R=0$

$$\therefore R=0 \Rightarrow 3 \cos \theta - 2 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في 2 من 3

$$\therefore v^2 = 2ag(1 - \cos \theta) \Rightarrow v^2 \Big|_{\cos \theta = \frac{2}{3}} = 2ag \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}ag$$

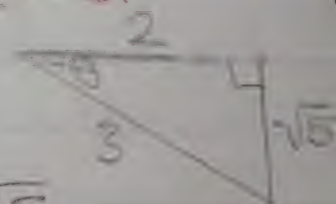
$$\therefore v = \sqrt{\frac{2}{3}ag}$$

الجسم تترك كعقدوف بسرعه ابتدائيه مقدارها  $\sqrt{\frac{2}{3}ag}$  بزاويه مقدارها  $\theta$  أو  $(2\pi - \theta)$



$$x = \sqrt{5}a - a \sin \theta$$

$$x = \sqrt{5}a - a \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$$





$$y = x \tan(\theta) = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2 \cos^2(\theta)}$$

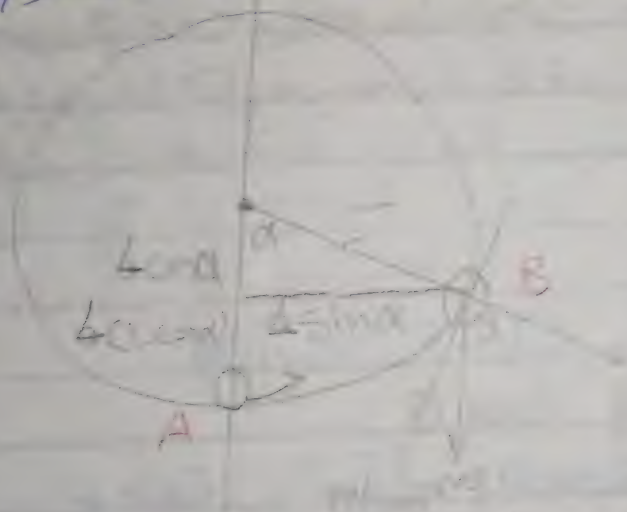
$$y = \frac{2\sqrt{5}}{3} a \cdot \frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} g \cdot \frac{4 \cdot 5 a^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$y = -\frac{5}{3} a + \frac{15}{4} a = \frac{25}{12} a$$

الجسم يبعد مسافة  $\frac{25}{12} a$  من نقطة القذف ويبعد مسافة  
عن أسفل أسفل نقطة لأتة

$$\frac{25}{12} a - (-a - a \cos \theta) = \frac{25}{12} a + \frac{5}{3} a = \frac{15}{4} a$$

مثال: نقطة مادية كتلة  $m$  معلقة من نقطة ثابتة بواسطة خيط حقيق  
غير من طوله  $L$  يدور النقطة المادية الحركة بسرعة ابتدائية أفقية  
مقدارها  $\sqrt{3}gL$  أوجد الموضع الذي يرتخي عنه الخيط واثبت أن أقصى  
ارتفاع تصل إليه النقطة المادية فوق هذا الموضع بعد تركها كحقيقة  
هو  $\frac{4}{27}L$  وأن أقصى ارتفاع لتقطع المتحركة فوق أسفل نقطة هو  $\frac{40L}{27}$



من شيفر الثاني

$$\frac{mv^2}{L} = T - mg \cos \theta \quad (1)$$

من مبدأ تايوت الطاقة

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + \frac{1}{2} m (3gL) = \frac{1}{2} m v^2 + mg L (1 - \cos \alpha)$$

$$3mgL = mv^2 + 2mgL(1 - \cos \alpha)$$

$$mv^2 = 3mgL - 2mgL(1 - \cos \alpha) = mgL(3 - 2 + 2\cos \alpha)$$

$$mv^2 = mgL(1 + 2\cos \alpha) \quad (2)$$

بالتعويض في (1)

$$mg(1 + 2\cos \alpha) = T - mg \cos \alpha$$



$$T = mg(1 + 3\cos\alpha)$$

عندما يرتفع الحيط يكون  $T=0$   
 $\therefore 1 + 3\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{3}$

$$v^2 = gL(1 + 2\cos\alpha) = \frac{1}{3}gL \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{3}gL}$$

المسافة المقطوعة  $\sqrt{\frac{1}{3}gL}$  بواسطة الجاذبية  $\frac{1}{3}gL$

$$\therefore y_{\text{max}} = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{\frac{1}{3}gL \cdot \frac{8}{9}}{2g} = \frac{4}{27}L$$

$$y_{\text{total}} = \frac{4}{27}L + L(1 - \cos\alpha) = \frac{4}{27}L + L(1 + \frac{1}{3}) = \frac{40}{27}L$$

**مثال 3:** كتلة  $m$  تتصل بخطين متساويين في الطول والطرفين المتساويين مثبتتين على محور رأسي واحد بحيث تدور الكتلة في دائرة أفقية حول المحور الرأسي واحد فإذا كانت طول الحبل الرأسي بين طرفي الحيط هو  $d$  فبين أن أقل سرعة زاوية لدوران الكتلة هي  $\sqrt{\frac{2g}{d}}$  وإذا كانت سرعة الدوران هي ضعف هذه السرعة فأثبت أن النسبة بين الشدتين هي  $\frac{5}{3}$



$$\begin{aligned} mrv^2 &= (T_1 + T_2) \sin\theta \\ r &= \frac{d}{2} \tan\theta \\ \therefore \frac{md}{2} \omega^2 \tan\theta &= (T_1 + T_2) \sin\theta \\ \frac{md\omega^2}{2} &= (T_1 + T_2) \cos\theta \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

$$\therefore T_1 \cos\theta = T_2 \cos\theta + mg \Rightarrow mg = (T_1 - T_2) \cos\theta \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2} = \frac{d\omega^2}{2g}$$

بحسب (1)  $\Rightarrow \frac{2g(T_1 + T_2)}{d(T_1 - T_2)}$

أقل سرعة زاوية عندما يكون  $T_2 = 0$  (حدث، انحنى في الحيط)



$$= \frac{2gT_1}{\sqrt{11}} = \omega = \sqrt{\frac{2g}{d}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \text{من قانون التشبيه}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega^2 d + 2g}{\omega^2 d - 2g} = \frac{8g + 2g}{8g - 2g} = \frac{5}{3} \neq$$

**Cheer** جسم متحرك B تتصل بنقطتين a, b على نفس الخط  
الذقيقي خطين غير متساويين في الطول وغير متيين قذف  
الجسم بسرعة تكاد تكفي بأن يوسم دائرة رأسية وعندما كانت  
B أسفل موضعها وانقطع الخط Bb ثم حركت B في دائرة  
أنصبة أثبت أن الزاوية Bba هي  $\frac{2}{3}$  أي  $\frac{1}{2}$  أثبت أنه  
إذا كان الشد في الخط Ba لم يتغير ما انقطع الخط Bb  
تكون قائم.



## الدفع والتصادم

الدفع :- قوة عظمى في فترة زمنية قصيرة

$$I = \int_0^{\Delta t} F \cdot dt = m \int_0^{\Delta t} a \cdot dt = m \int_0^{\Delta t} \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

$$\therefore I = m \int_{v_1}^{v_2} dv = mv_2 - mv_1 = \Delta p$$

التغير في كمية الحركة في فترة زمنية قصيرة  
الدفع المتصور

$$J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} F \cdot dt$$

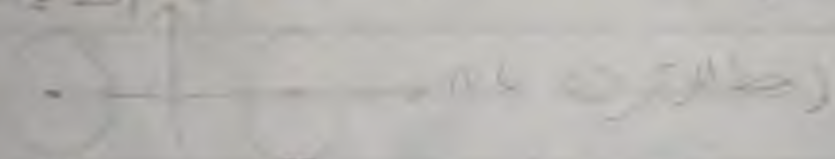
التصادم :- لكي يتم حل مسائل التصادم لابد من علاقتين  
① كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

$$\frac{\text{السرعة النسبية بعد التصادم}}{\text{السرعة النسبية قبل التصادم}} = -e$$

حيث  $e$  يعبر معامل الارتداد وهو  $0 < e < 1$  و  $e=1$  تصادم  
مركزي فلفلي الفلوات

← إذا كانت التصادم في كرتين فإن التصادم يكون في  
اتجاه خط المراكزين ولا يكون في اتجاه المماسين

(خط المماسين)



$$\therefore m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \quad ①$$

حيث  $u, u'$  هي السرعات بعد التصادم

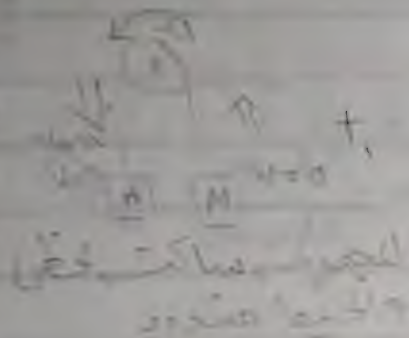
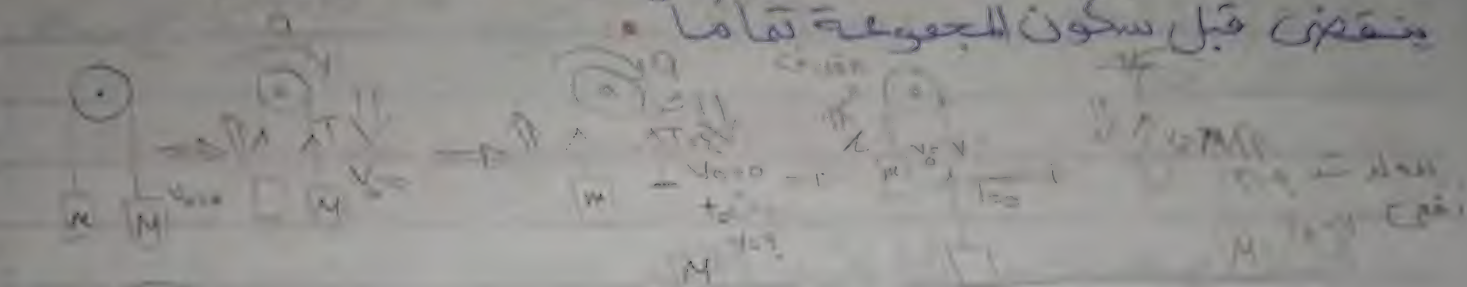
$$\therefore \frac{v'_{1x} - v'_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} = -e \quad ②$$

حيث  $u, u'$  هي السرعات بعد التصادم

وقبل التصادم معلوم وبالتالي المجهول في معادلتين  $u, u'$



كثمتان  $m$  و  $M$  متصلتان بحبل خفيف غير مرئي يمر من بكر حول بكر  
 ملساء ومثبتة الدور في المستوى رأسى أعلى مستوى  
 أفقى أملس، والكتلة الكبرى  $M$  مرسوك بربا والمجموعة ساكنة  
 إذا تركت الكتلة  $M$  للحركة وإذا علم أننا نصل المستوى الأفقى  
 بعد زمن  $t$  أثبت أن المجموعة تصبح في حالة سكون طولى  
 والحبل مشدود بعد زمن  $(m+M)t/3$  وأوجد الزمن الذى  
 ينقضى قبل سكون المجموعة تماماً.



من الرسم أن الزمن المطلوب هو

$$T = + + t + t_1$$

في المرحلة الأولى:

$$Mg = Mg - T \Rightarrow mg = T - mg$$

$$g(M+m) = g(M-m) \Rightarrow a = \frac{M-m}{M+m} g$$

الجهة ثابتة أى منتظمة

بالسرعة قبل التوقف مباشرة

$$v = v_0 + at \Rightarrow v = \frac{M-m}{M+m} g t \quad \text{--- (1)}$$

عند التوقف بمرحلة المستوى يرتفع الحبل ويتحرك  $m$  مسافة  
 مقترن رأسى بـ سرعته  $v$  وزاوية  $\frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{2v \sin \alpha}{g} = \frac{2v_1}{g} = \frac{2(M-m)}{M+m} t \quad \text{--- (2)}$$



بعد تحريك الكتلة  $m$  مسافة  $z$  وتترك لتزمن مقدارة  $z$  من الطرآن 1  
يتولد تشد في الجبل وبالتالي يتولد تشد دفعي يعمل  
على تحريك المجموعة في اتجاه  $m$  بفعل تشد مقداره  $a$ .  
حتى تسكن الحظي والجبل تشد دور

$$m a_1 = m g - T \quad , \quad M a_2 = T - M g$$

مجموع

$$a_1 (M+m) = (m-M)g \Rightarrow a_2 = -\frac{(M-m)}{M+m} g = -a$$

في كمية الحركة بعد الرفع = كمية الحركة قبل الرفع

$$\therefore M V + m U = M V' + m U'$$

حيث الصورة تتحرك كجسم واحد  $U = U'$   $U = U'$

$$\therefore M(0) + m V = (M+m) V'$$

$$\therefore V' = \frac{m V}{M+m} \Rightarrow V' = \frac{m}{M+m} \times \frac{M-m}{M+m} g t$$

$$\therefore V' = \frac{m(M-m)}{(M+m)^2} g t$$

المجموعة تترك بسرعة ابتدائية مقدارها  $V'$  حتى تسكن

$$\therefore V = V_0 + a_2 t_1 \Rightarrow -V_0 = -a t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{a} = \frac{V'}{a}$$

$$\therefore t_1 = \frac{m(M-m) g t}{(M+m)^2} \times \frac{(M+m)}{(M-m) g} = \frac{m t}{(M+m)}$$

$\therefore$  الزمن المطلوب وهو الزمن حتى تسكن المجموعة يكون الحظي

والجبل تشد دور هو

$$T = t + z + t_1 = t + \frac{2(M-m)t}{M+m} + \frac{m t}{M+m}$$

$$T = t \left[ \frac{M+m+2M-2m+m}{M+m} \right] = t \left[ \frac{3M}{M+m} \right]$$

$$\therefore T = 3t M / (M+m) \quad \neq$$



## المطلوب الثاني المعاصرة القادمة :-

التصادم



$m$

$M$

$v$

$u$

$v'$

$u'$

قبل التصادم

بعد التصادم

قبل التصادم

$$\underline{v} = (v \cdot \hat{n}) \hat{n} + (v - v \cdot \hat{n}) \hat{t}$$

$$\underline{u} = (u \cdot \hat{n}) \hat{n} + (u - u \cdot \hat{n}) \hat{t}$$

التصادم المباشر لا يحدث تغيير في اتجاه السطح المشترك

$$\underline{v}' = (v' \cdot \hat{n}) \hat{n} + (v' - v' \cdot \hat{n}) \hat{t}$$

$$\underline{u}' = (u' \cdot \hat{n}) \hat{n} + (u' - u' \cdot \hat{n}) \hat{t}$$

بعد التصادم

التصادم المباشر لا يحدث تغيير في اتجاه السطح المشترك

$$= \underline{u} \cdot \hat{t} - \underline{u}' \cdot \hat{t} = \underline{v} \cdot \hat{t} - \underline{v}' \cdot \hat{t}$$

القانون الأول :-

كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

$$= M(\underline{u} \cdot \underline{n}) + m(\underline{v} \cdot \underline{n}) = M(\underline{u}' \cdot \underline{n}) + m(\underline{v}' \cdot \underline{n}) \quad (1)$$

القانون الثاني :- نيوتن التجريبي

النسبة بين السرعة النسبية بعد التصادم إلى النسبة السرعة النسبية قبل التصادم يساوي مقدار ثابت يعرف بمعامل الارتداد

السرعة النسبية لـ  $m$  بالنسبة لـ  $M$  قبل وبعد التصادم

$$(\underline{v}' \cdot \underline{n}) - (\underline{u}' \cdot \underline{n}) = -e(\underline{v} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{n}) \quad (2)$$

ملاحظات :-

عندما يكون الكره ساكنه قبل التصادم تترك الكرة في اتجاه قط المرتزن فقط بعد التصادم.

مثال :- إذا تصادمت كره بأخرين خفيف كتلتها وتترك بسرعة يساوي سبع سرعتها أثبت أنه إذا كان  $e = \frac{1}{4}$  فإن الكرة لا تدور تسكن بعد التصادم.

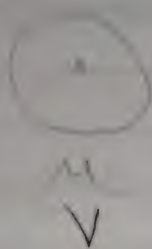
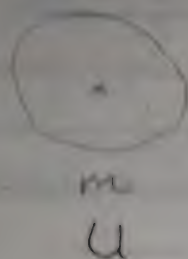
مع المعيين



مركز الكتلة هو مركز الكتلة  
 تذكر أن: سرعة مركز الكتلة أي جسمين  $M$  و  $m$   
 $\bar{x} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m}$   
 $\bar{y} = \frac{My_1 + my_2}{M+m}$   
 سرعة مركز الكتلة  $(\bar{x}, \bar{y})$

لحقيقة أن أحاطة هذا الكوكب الجسيم (بالطاقة) = الطاقة  $M$  + الطاقة  $m$   
 $M + m$

نسبة سرعة مركز الكتلة



$$\bar{v} = \frac{Mv + mu}{M+m} \quad (1)$$

السرعة النسبية  $u-v$

$$u = u - v \quad (2)$$

من المعادلة:

$$(M+m)\bar{v} = Mv + mu \quad (3)$$

نحذف  $M$  داخل مع 3

$$(M+m)\bar{v} + M\underline{u} = M\underline{u} + m\underline{u}$$

$$= (M+m)\bar{v} + M\underline{u} = (M+m)\underline{u}$$

$$\underline{u} = \bar{v} + \frac{M}{M+m} \underline{u} \Rightarrow (4)$$

نضرب أن  $\frac{1}{M} + \frac{1}{m} = \frac{M+m}{Mm}$   $\Rightarrow \frac{1}{M} = \frac{M+m}{Mm} - \frac{1}{m}$

من 5 ثم القوس في 4

$$\underline{u} = \bar{v} + \frac{1}{\frac{M+m}{Mm}} \underline{u} \quad (8)$$

نحذف  $m$  داخل مع 8

$$(M+m)\bar{v} - m\underline{u} = m\underline{v} + M\underline{v} = \underline{v}(M+m)$$

$$\underline{v} = \bar{v} - \frac{m}{M+m} \underline{u} \Rightarrow 6 \Rightarrow \underline{v} = \bar{v} - \frac{m}{M+m} \underline{u}$$

من 5 و 6

$$\underline{v} = \bar{v} - \frac{1}{\frac{M+m}{Mm}} \underline{u} \Rightarrow 7$$



المعادلة 867 سرعة الكرتين قبل التصادم بدلالة ثلاثين السرعة  
النسبية وسرعة مركز الكتلة الكرتين

بعد التصادم:-

كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

$$M\vec{v} + m\vec{u} = M\vec{v}' + m\vec{u}'$$

نفسية ثلاثين طرفي المعادلة على  $(M+m)$

$$\vec{v} = \frac{M\vec{v}' + m\vec{u}'}{M+m} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}'$$

السرعة الزاوية لا تتغير قبل وبعد التصادم

$$\textcircled{5} \quad \vec{u} \cdot \hat{n} = -e \vec{\omega} \cdot \hat{n}$$

لا حظ أنه لم نكتب السرعة النسبية في اتجاه  $\hat{n}$  لأنها لم تتغير  
يقس بالطريق التي تم الوصول إليها  $\vec{u}$ ، لا تقوم بها  
الوصول على  $\vec{u} \cdot \hat{n}$

$$\vec{u}' = \vec{v} + \frac{1}{\mu m} \vec{\omega}'$$

$$\vec{u}' \cdot \hat{n} = \vec{v} \cdot \hat{n} + \frac{1}{\mu m} \vec{\omega}' \cdot \hat{n} \quad \textcircled{10}$$

بالتعويض من و في 10  $\mu m$

$$\vec{u}' \cdot \hat{n} = \vec{v} \cdot \hat{n} + \frac{1}{\mu m} (-e) (\vec{\omega} \cdot \hat{n})$$

$$\vec{u}' \cdot \hat{n} = \vec{v} \cdot \hat{n} - \frac{e}{\mu m} \vec{\omega} \cdot \hat{n} \quad \textcircled{11}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \frac{1}{\mu M} \vec{\omega}' \quad \textcircled{12}$$

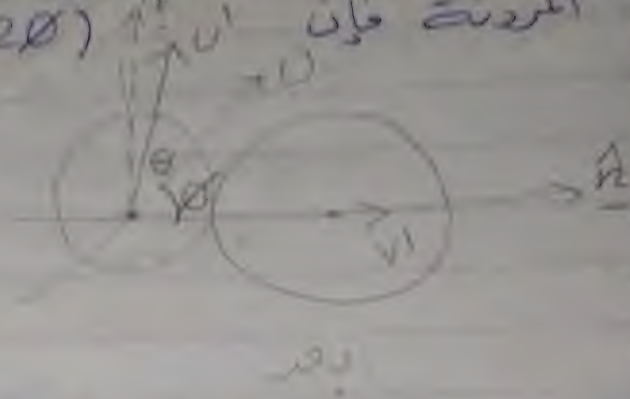
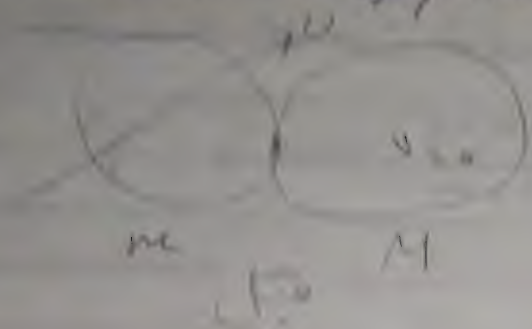
$$\vec{v}' \cdot \hat{n} = \vec{v} \cdot \hat{n} + \frac{1}{\mu M} \vec{\omega}' \cdot \hat{n}$$

$$\vec{v}' \cdot \hat{n} = \vec{v} \cdot \hat{n} - \frac{e}{\mu M} \vec{\omega} \cdot \hat{n}$$



# مسألة

اصطدمت كرة هلياء كتلتها  $m$  بأخرى ساكنة كتلتها  $M$  ثم انزعت  
 فزادته  $\theta$  عن اتجاه حركتها الأولى إذا علم أن الكرة  $M$  تحركت  
 بعد التصادم في اتجاه يصنع زاوية  $\phi$  مع الاتجاه الأول لحركة  $m$   
 فأثبت أن إذا كانت  $m = eM$  فإن اتجاهي سرختي الكرتين  
 بعد التصادم متعاممتين ثم أثبت أنه إذا كان التصادم تاماً  
 المرونة فإن  $\tan \theta = M \sin 2\phi / (m - M \cos 2\phi)$



قبل

$$\begin{aligned} m(U \sin \theta) \underline{\hat{t}} &= U' \cdot \underline{\hat{t}} \\ (U \cos \theta) \underline{\hat{n}} &= U' \cdot \underline{\hat{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \cdot \underline{\hat{t}} &= 0 = 0 \\ V \cdot \underline{\hat{n}} &= 0 \end{aligned}$$

بعد

$$\begin{aligned} (U \sin \theta) \underline{\hat{t}} &= U' \cdot \underline{\hat{t}} \\ U' \cdot \underline{\hat{n}} &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \cdot \underline{\hat{t}} &= 0 \\ V' \cdot \underline{\hat{n}} &= q \end{aligned}$$

$$q = \frac{MV + mU}{M + m} = \frac{0 + mU}{M + m} = \frac{1}{k+1} U$$

$$q \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{1}{k+1} \cdot U \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{U \cdot \underline{\hat{n}}}{k+1}$$

$$U' = U - V \Rightarrow U' = U \Rightarrow U' \cdot \underline{\hat{n}} = U \cdot \underline{\hat{n}}$$

بعد التصادم

$$U' \cdot \underline{\hat{n}} = q \cdot \underline{\hat{n}} - \frac{e}{k+1} U' \cdot \underline{\hat{n}}$$

$$U' \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{U \cdot \underline{\hat{n}}}{k+1} - \frac{e}{k+1} \cdot U' \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{U \cdot \underline{\hat{n}}}{k} \left( \frac{1}{M} - \frac{e}{m} \right)$$



$$= U' \cdot n = \frac{U \cdot n}{h} \left( \frac{m - Mc}{Mm} \right) = \frac{U \cdot n}{h} (0) = 0$$

$$\therefore U' \cdot n = 0 \quad \text{و (1)}$$

→ الحركة الشعاعية من مكانه فإن أقراصه حركتها بعد التصادم يكون في اتجاه  
خط المركزين (n) ومن الناتج (1) يوضح أن  $U' \cdot n$   
يعني  $U' \cdot n$  وهو المحلوي  
(ب) للحافرة العادية

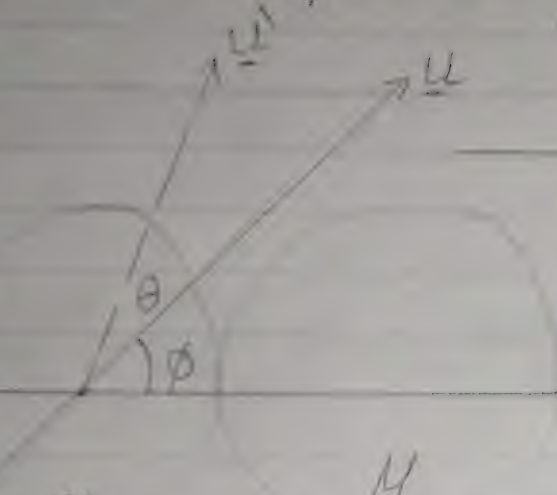


## المعادلة الأخيرة

هناك أصل من الكرة فليس ككتلتها  $m$  بأخرى ساكنة كتلتها  $M$  ثم انضمت زاوية  $\theta$  على اتجاه حركتها الأصلي. إذا علم أن الكرة  $M$  حركت بعد التصادم في اتجاه يصنع زاوية  $\phi$  مع الاتجاه الأصلي لحركة  $m$ . فأثبت أن

① إذا كانت  $m = eM$  فإن اتجاهي سرعتي الكرتين بعد التصادم متعامدان

② إذا كان التصادم تام المرونة فإن

$$\tan \theta = M \sin 2\phi / (m - M \cos 2\phi)$$


$\underline{u} \cdot \underline{n} = u \cos \phi$ $\underline{u}' \cdot \underline{n} = ?$ $\underline{u} \cdot \underline{t} = u \sin \phi$ $\underline{u}' \cdot \underline{t} = ?$	$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ $\underline{v}' \cdot \underline{n} = ?$ $\underline{v} \cdot \underline{t} = \underline{v}' \cdot \underline{t} = 0$
--	---

$$\therefore \underline{q} = \frac{m\underline{u} + M\underline{v}}{m+M} \Rightarrow \underline{q} = \frac{m\underline{u} + M(0)}{M+m}$$

$$\Rightarrow \underline{q} = \frac{m}{M+m} \underline{u} \Rightarrow \underline{q} \cdot \underline{n} = \frac{m}{M+m} (\underline{u} \cdot \underline{n})$$

$$\Rightarrow \underline{q} \cdot \underline{n} = \frac{\mu}{M} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \underline{w} = \underline{u} - \underline{v} = \underline{u} - 0 \Rightarrow \underline{w} = \underline{u} \Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{n} = \underline{u} \cdot \underline{n}$$

بعد التصادم

$$\underline{u}' \cdot \underline{n} = \underline{q} \cdot \underline{n} - \frac{\mu e}{m} (\underline{w} \cdot \underline{n})$$

بالتعويض

$$\underline{u}' \cdot \underline{n} = \frac{\mu}{M} (\underline{u} \cdot \underline{n}) - \frac{\mu e}{m} (\underline{u} \cdot \underline{n})$$

$$= \mu (\underline{u} \cdot \underline{n}) \left( \frac{1}{M} - \frac{e}{m} \right)$$

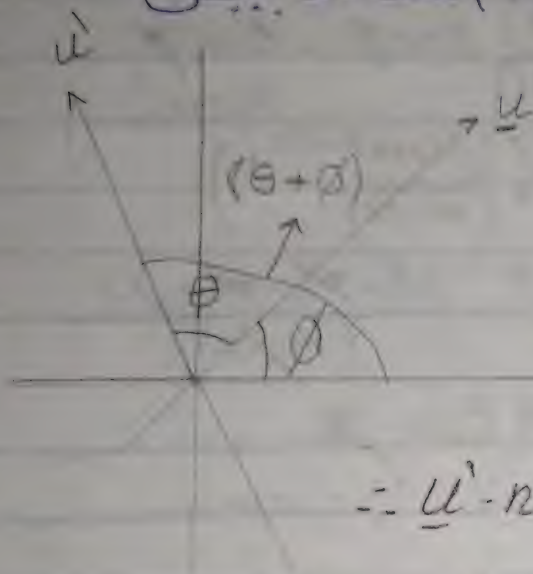


$$= \underline{u}' \cdot \underline{n} \Big|_{m=eM} = \mu (\underline{u} \cdot \underline{n}) \left( \frac{1}{M} - \frac{e}{eM} \right) = 0$$

∴ الكرة  $M$  ساكنة قبل التصادم فإن اتجاه حركتها بعد التصادم في اتجاه خط المراكزين  $(\underline{n})$  من الملاحظات

$$\therefore \underline{u} \cdot \underline{n} = 0, \quad \underline{v}' \cdot \underline{n} = 1 \Rightarrow \underline{u}' \cdot \underline{v}' = 0$$

∴ اتجاهي سرعتي الكرتين بعد التصادم متعامدان بين المطلوب الثاني



$$\tan \theta = \frac{M \sin 2\phi}{m - M \cos 2\phi} \quad (\text{المطلوب إثباته})$$

∴ التصادم مرن  $e=1$

$$\therefore \underline{u}' \cdot \underline{n} = \frac{\mu}{M} \underline{u} \cdot \underline{n} - \frac{e\mu}{m} \underline{u} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{u}' \cdot \underline{n} = \frac{m}{m+M} \underline{u} \cdot \underline{n} - \frac{M}{m+M} \underline{u} \cdot \underline{n}$$

$$\therefore \underline{u}' \cdot \underline{n} = \left( \frac{m-M}{M+m} \right) (\underline{u} \cdot \underline{n}) = \left( \frac{m-M}{M+m} \right) u \cos \phi$$

تذكر أن الفرق في اتجاه حركتي ما يحسب بتقسيم المركبة في اتجاه  $\pm \underline{n}$  المركبة في اتجاه  $\underline{n}$  لكن أمنا إمتنا للمركبات

$$\therefore \tan(\theta + \phi) = \frac{\underline{u}' \cdot \underline{t}}{\underline{u}' \cdot \underline{n}} = \frac{u \sin \phi (M+m)}{(m-M)(u \cos \phi)}$$

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{M+m}{-M+m} \tan \phi$$

$$\frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi} = \frac{M+m}{m-M} \tan \phi$$



$$\tan \theta + \tan \phi = \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan \phi (1 - \tan \theta \tan \phi)$$

$$\tan \theta = \frac{(M+m)}{(m-M)} (\tan \phi - \tan \theta \tan^2 \phi) - \tan \phi$$

$$\tan \theta = \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan \phi - \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan \theta \tan^2 \phi - \tan \phi$$

$$\tan \theta + \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan \theta \tan^2 \phi = \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan \phi - \tan \phi$$

$$\tan \theta \left( 1 + \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan^2 \phi \right) = \tan \phi \left( \frac{(M+m)}{(m-M)} - 1 \right)$$

$$\tan \theta \left( \frac{(m-M) + (M+m) \tan^2 \phi}{(m-M)} \right) = \tan \phi \left( \frac{M+m - m + M}{(m-M)} \right)$$

$$\tan \theta ((m-M) + (M+m) \tan^2 \phi) = 2M \tan \phi$$

$$\tan \theta = \frac{2M \tan \phi}{(m-M) + (M+m) \tan^2 \phi}$$

$$\tan \theta = \frac{2M \tan \phi}{(m-M) \cos^2 \phi + (M+m) \sin^2 \phi}$$

$$\cos^2 \phi$$

$$\tan \theta = \frac{2M \sin \phi \cos \phi}{(m-M) \cos^2 \phi + (M+m) \sin^2 \phi}$$

$$\tan \theta = \frac{M \sin 2\phi}{m \cos^2 \phi - M \cos^2 \phi + M \sin^2 \phi + m \sin^2 \phi}$$



$$\tan \theta = \frac{M \sin 2\phi}{m (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - M (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}$$

$$\tan \theta = \frac{M \sin 2\phi}{m - M \cos 2\phi} \quad \#$$

مثال :- من المثال السابق أثبت أن أكبر قيمة لزاوية الإخفاق تعطى من

$$\tan \theta_{\max} = \frac{M}{\sqrt{m^2 - M^2}}$$

$$\tan \theta = \frac{M \sin 2\phi}{m - M \cos 2\phi} = f(\phi) \quad \text{من المعطى السابق} \quad (1)$$

فد أن  $\theta$  دالة في  $\phi$  وكما زادة  $\phi$  تقل  $\theta$  وبالتالي لكي تكون  $\theta$  قيمة عظمى لابد وأن تكون  $\phi$  قيمة صغرى

$$\begin{aligned} f'(\phi) &= \frac{[M^2 \cos 2\phi (m - M \cos 2\phi) - 2 \sin 2\phi (M \sin 2\phi)]}{(m - M \cos 2\phi)^2} \\ &= 2M \frac{m \cos 2\phi - M \cos^2 2\phi - M \sin^2 2\phi}{(m - M \cos 2\phi)^2} \\ &= 2M \frac{m \cos 2\phi - M}{(m - M \cos 2\phi)^2} \end{aligned}$$

$$2M [m \cos 2\phi - M] = 0 \quad \leftarrow f'(\phi) = 0$$

$$M = 0 \quad \text{OR} \quad m \cos 2\phi = M \Rightarrow \cos 2\phi = \frac{M}{m}$$

تكون  $\phi$  قيمة صغرى عندما يكون  $\cos 2\phi = \frac{M}{m}$  وللتأكد  
نشتق مرة أخرى  $f''(\phi)$  لم نقومنا بـ قيمة  $\cos 2\phi = \frac{M}{m}$   
فإن الناتج هو موجب ولم يكن غير ذلك يعني  
المثال غلط



تذكر أن

$$P'(x) = 0 \Rightarrow$$

نتائج

هذا لناتج ليعطى دالة في المستقيم

عظمى  $-Ve$   
صغرى  $+Ve$   
غير معرف  $\pm \infty$

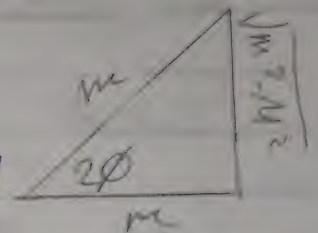
$$\cos 2\theta = \frac{M}{m} \quad \text{وعند القوتين}$$

$$\tan \theta_{\max}$$

$$\leftarrow \tan \theta$$

$$\tan_{\max} = \frac{M(\sqrt{m^2 - M^2}/m)}{m^2 - M^2}$$

$$\tan_{\max} = \frac{M\sqrt{m^2 - M^2}}{m^2 - M^2} = \frac{M}{\sqrt{m^2 - M^2}} \quad \#$$



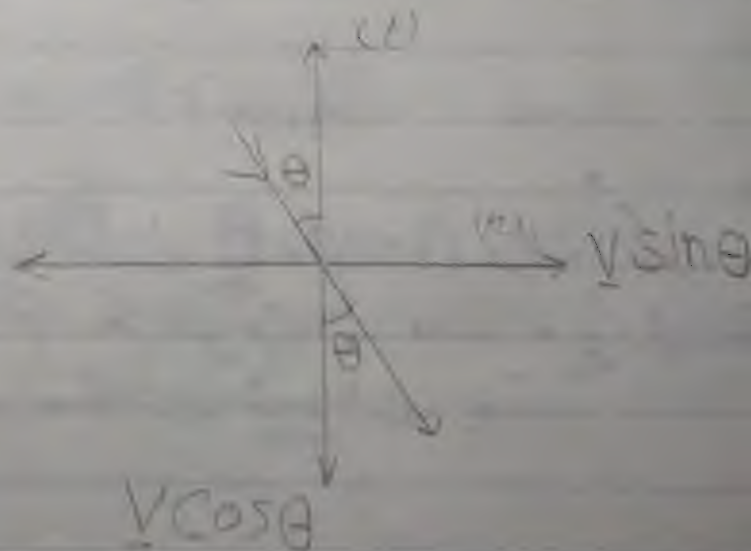
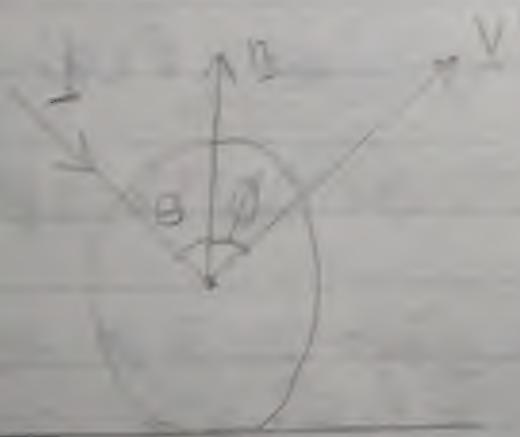
تصام كرة بمستوى أملس :-

تعتبر المستوى كرة نصف قطرها  $\infty$  وبالتالي يصبح سطح  
المستوى المماس المشترك



الرسم

إستنتاج المعادلات





$$\underline{U}' = -e \underline{U} \quad \text{--- (2)} \quad ; \quad \underline{U}' = -e \underline{U} \quad \text{--- (1)}$$

مع العلم بأن سرعة المستوى  $U=0$

$$\underline{U}' \cdot \underline{t} = \underline{U} \cdot \underline{t} = U \sin \theta \quad \text{--- (3)} \quad , \quad \underline{U} \cdot \underline{n} = -U \cos \theta$$

من 2

$$\underline{U}' \cdot \underline{n} = -e (\underline{U} \cdot \underline{n}) \Rightarrow \underline{U}' \cdot \underline{n} = -e (-U \cos \theta)$$

$$\underline{U}' \cdot \underline{n} = +e U \cos \theta$$

$$|\underline{U}'| = \sqrt{(\underline{U}' \cdot \underline{t})^2 + (\underline{U}' \cdot \underline{n})^2} = \sqrt{U^2 \sin^2 \theta + e^2 U^2 \cos^2 \theta}$$

$$|\underline{U}'| = U \sqrt{\sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta}$$

$$|\underline{U}'| = |\underline{U}| \quad \Leftarrow \quad e=1$$

$$\theta = \phi \quad \Leftarrow \quad e=1$$

$$e=1 \quad \Leftarrow \quad \text{يكون السرعات وهي نورانية عكس اتجاهها}$$

كل منهما

وهي كلها

تكون

من الرسم

$$\cot \phi = \frac{\underline{U}' \cdot \underline{n}}{\underline{U}' \cdot \underline{t}} = \frac{e U \cos \theta}{U \sin \theta} = e \cot \theta$$

$$\cot \phi = e \cot \theta \Rightarrow \theta = \phi \quad | \quad e=1$$

إذا كان المستوى قاعد المروحة  $e=0$

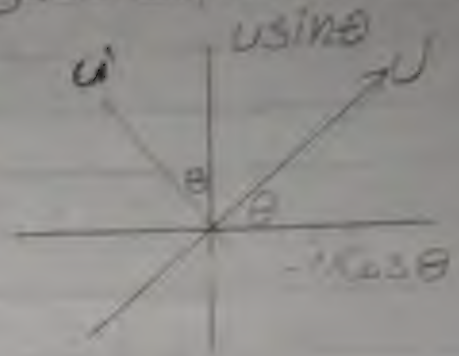
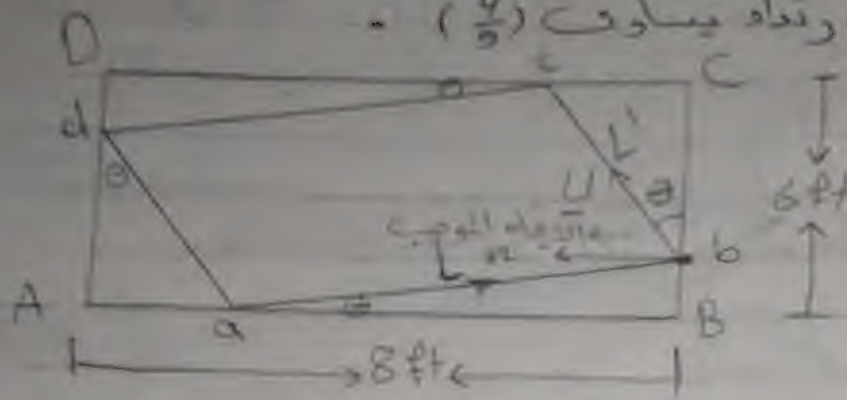
$$\cot \phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$U' = U \sin \theta$$

أي الكرة تنحرف على المستوى



مثال: مضخة بلياردو طولها 8 ft وأحد موضع تقطع على الجانب القصير المضخة تضرب عندها كرة وأحد اتجاه القذف عيب رسم الكرة مساوياً على شكل مستطيل تحوّل على الكرة لتقسى التقطع السابق بعد أن تكون قد اصطدمت بالجوانب الثلاثة الأخرى للمضخة علماً بأن معامل الارتداد يساوي  $(\frac{4}{9})$ .



$$\underline{U'} \cdot \underline{t} = \underline{U} \cdot \underline{t} = U \sin \theta$$

$$\underline{U'} \cdot \underline{n} = -e(\underline{U} \cdot \underline{n}) = eU \cos \theta = \frac{4}{9} U \cos \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{U' \cdot n}{U' \cdot t} = \frac{\frac{4}{9} U \cos \theta}{U \sin \theta} = \frac{4}{9} \cot \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{4}{9} \cot \theta \Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \tan \theta = \frac{2}{3}$$

$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3}$  : اتجاه القذف هو

$$\therefore Bb + bC = 6 \Rightarrow L \sin \theta + L' \cos \theta = 6 \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$Aa + aB = 8 \Rightarrow L' \sin \theta + L \cos \theta = 8 \Rightarrow \textcircled{2}$$

$$\therefore L \sin \theta + L \cos \theta = 6$$

$$L' \sin \theta + L \sin \theta = 8$$



$$\therefore \frac{2}{\sqrt{13}} L + \frac{3}{\sqrt{13}} L' = 6 \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{13}} L' + \frac{3}{\sqrt{13}} L = 8$$

$$\therefore L' = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

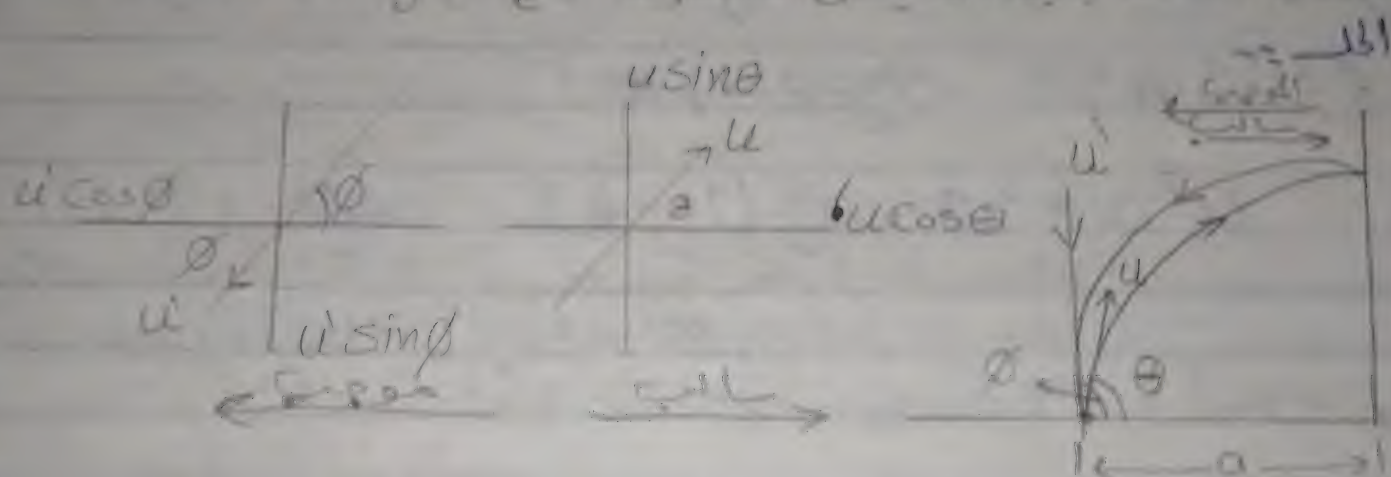
$$, \quad L = \frac{12\sqrt{13}}{5}$$

هذا المبدأ ليس ينتج أن



$$Bb = L \sin \theta = \frac{2H}{5} ft, \quad bc = L' \cos \theta = \frac{6}{5} ft$$

مثال: قذفت كرة هوائية من نقطة  $O$  على بعد قدره  $a$  من حائط رأسى أملس فاصطدمت بالحائط وعادت لتقطع القنطرة مرة أخرى، إذا كانت  $\theta$  زاوية القنطرة  $\phi$  زاوية ميل مسار الكرة على الأفق عند تقاطع القنطرة عشودة الكرة إليها. أثبت أن  $\tan \theta = e \tan \phi$  حيث  $e$  معامل ارتداد الكرة على الحائط. أثبت أيضاً أنه لكي تعود الكرة لتقطع القنطرة يجب أن يتحقق الشرط  $(L \sin 2\theta = 5gC/a^2)$



نفرض أن :- ① سرعة القذف  $u$  (قبل التصادم)

② سرعة عودتها مرة أخرى (بعد التصادم)  $u'$

= المستوى أملس فأنه لا يوجد تغيير على  $x$

$$\therefore u \sin \theta = u' \sin \phi \quad (1)$$

من نيوتن التجريب (القانون الثالث للقانون) (القانون الثاني)

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = -e \underline{u}' \cdot \underline{n} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{n} = e u \cos \theta \quad (2)$$

= الجسم يترك كمقدراً فإن السرعة الأفقية لا تتغير على طول المسار سواء قبل التصادم أو بعده

$$u' \cos \phi = e u \cos \theta \Rightarrow (3)$$

بقسمة 3 على 2

$$\tan \phi = e \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = e \tan \phi$$

لكي يعود الكرة لنفس القطع لا بد أن يتساوى زمن الطيران مع مجموع زمن الذهاب والإياب



المساحة = المساحة الرأسية (مقطعة) + المساحة الأفقية (مقطعة) = المساحة الرأسية (مقطعة) + المساحة الأفقية (مقطعة)

$$\therefore T = \frac{2U \sin \theta}{g} = \frac{ea}{eU \cos \theta} + \frac{a(e+1)}{eU \cos \theta}$$

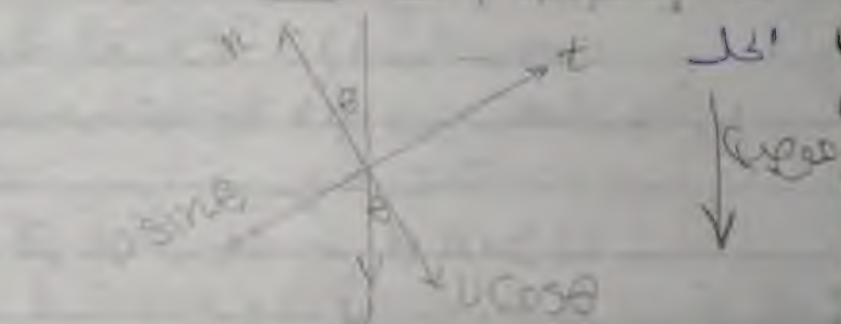
$$= \frac{2U \sin \theta}{g} = \frac{ea + a}{eU \cos \theta} = \frac{a(e+1)}{eU \cos \theta}$$

$$2U^2 \sin \theta \cos \theta = ag(e+1)$$

$$eU^2 \sin 2\theta = ag(e+1) \Rightarrow$$

$$U^2 \sin 2\theta = ag \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad \#$$

مثال 2 - سقطت كرة رأسياً من سكون فاصطدمت بعد ثلاثين ثانية بمستوى أفقي. أوجد سرعة الكرة عند الاصطدام. إذا علم أن معامل الارتداد يساوي 3/4. أثبت أن الكرة تصطدم بالمستوى مرة أخرى بعد 3 ثوانٍ من الاصطدام الأول.



من قوانين نيوتن للحركة

$$V = V_0 + gt$$

$$\therefore V = 0 + 32 \times 2 = 64 \text{ ft/s}$$

$$\therefore \underline{U} \cdot \underline{t} = \underline{U}' \cdot \underline{t} = U \sin \theta = 64 \sin 30 = 32$$

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = U \cos \theta = 64 \cos 30 = 32\sqrt{3}$$

و اتجاهها في الخ

$$\underline{U}' \cdot \underline{n} = e \underline{U} \cdot \underline{n} = e(-U \cos \theta) = -eU \cos \theta$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 32\sqrt{3} = -24\sqrt{3}$$

و اتجاهها في الخ



• الكرة تتحرك بعد التصادم بسرعة إبتدائية مقدارها  $24\sqrt{3}$   
 • الحركة حائل زاوية  $30^\circ$  على الأفقى والعلية الجاذبية رأسياً على الأفقى جان العجل خلال

• الجسم اسطر من أفري بالمستوى  
 $\therefore \uparrow \downarrow = 0 \quad y = 0$

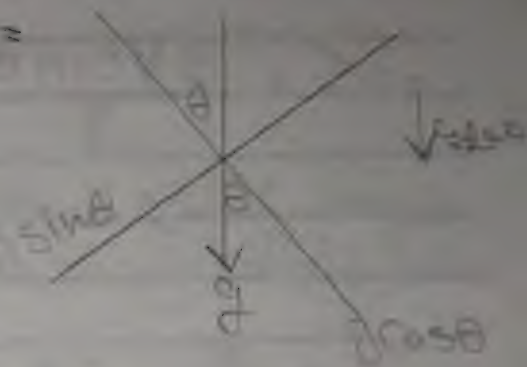
$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$0 = -24\sqrt{3} + \frac{1}{2} (g \cos \theta) t^2$$

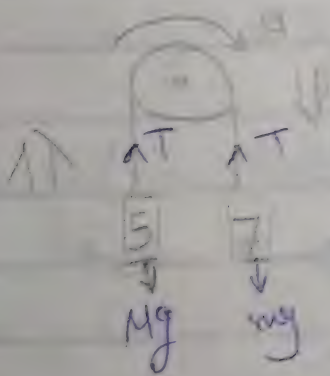
$$0 = -24\sqrt{3} + \frac{1}{2} (32 \cos 30) t^2$$

$$\Rightarrow 0 = t (-24\sqrt{3} + 8\sqrt{3} t)$$

$$t = 0 \quad , \quad 24\sqrt{3} = 8\sqrt{3} t \Rightarrow t = 3 \quad \#$$



الت. كتلتان مقدارهما بالباوند 5.7 مسدلتان خيطاً غير مرئيين  
 كره ملساء مثبته، إذا علم أن الكرة الخرى تصطدم بمستوى أفقى غير  
 يبعد ثلاث ثوانٍ من يدو كلاً، أثبت أن النظام يعود إلى حالت  
 كونا ظه بعد زمن  $\frac{3}{4}$  ثانية من لحظة التصادم.



$$\Rightarrow m a = m g - T \quad (1)$$

$$M a = -M g + T \quad (2)$$

المجمع

$$a (m + M) = g (m - M)$$

$$a (12) = 2g \Rightarrow a = \frac{g}{6}$$

المجموعه متحركه بسرعة لا ويعتبره  
 $a = \frac{g}{6}$



عند اصطدام الكتلة 7 بالمستوى تترك الكتلة 5 كقذوف رأسياً  
بسرعة قذوف مقدارها لا تتم العودة زمن الطيران

$$V = V_0 + at \Rightarrow U = 0 + \frac{g}{8} \times 3 = \frac{g}{2}$$

$$\therefore t = \frac{2V \sin \theta}{g} = \frac{2U}{g} = \frac{2g}{2g} = 1 \text{ ث}$$

الكتلة 5 استغرق ثابته للحركة كقذوف والعودة مرة أخرى بنفس  
السرعة حتى تستد الجبل فجاءه قنول شداد دفع لظن في الجبل

كمية الحركة بعد النقع = كمية الحركة قبل النقع

$$\therefore M V = (m + M) V'$$

$$5 \times \frac{g}{2} = (12) V' \Rightarrow V' = \frac{5}{24} g$$

المجموعة تترك بعجلة مقدارها  $-g = -\frac{g}{6}$  وبسرعة  $\frac{5g}{24}$   
حتى تسكن تسكن طظن والجبل مشدود

$$\therefore V'' = V_0 + at$$

$$0 = \frac{5g}{24} - \frac{g}{6} t$$

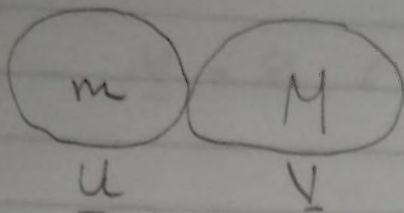
$$\therefore \left(\frac{5g}{24}\right) = \left(\frac{g}{6}\right) t \Rightarrow t = \frac{5}{4}$$

الزمن الكلي الذي استغرقت المجموعة للسكون مرة  
أخرى هو

$$T = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} \text{ s} \quad \#$$



مثال: - أوجد الفقد في طاقة الحركة بين كرتين أثناء التصادم  
أو مثال: - احسب الفقد في طاقة الحركة الناشئة عن تصادم كرتين  
مساويتان كتلتها  $m, M$  وسرعتا قبل التصادم  $\underline{u}, \underline{v}$



فستنتج قوانين سرعة مركز الكتلة فينتج أن

$$\underline{u} = \underline{v} - \frac{\mu}{M} \underline{\omega} \quad , \quad \underline{u} = \underline{v} + \frac{\mu}{m} \underline{\omega}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} m \underline{u}^2 + \frac{1}{2} M \underline{v}^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\underline{u} - \underline{u}) + \frac{1}{2} M (\underline{v} \cdot \underline{v})$$

$$K = \frac{1}{2} m \left( \underline{v} + \frac{\mu}{m} \underline{\omega} \right) \cdot \left( \underline{v} + \frac{\mu}{m} \underline{\omega} \right) + \frac{1}{2} M \left( \underline{v} - \frac{\mu}{M} \underline{\omega} \right) \cdot \left( \underline{v} - \frac{\mu}{M} \underline{\omega} \right)$$

$$K = \frac{1}{2} m \left[ \underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{\mu}{m} \underline{v} \cdot \underline{\omega} + \frac{\mu}{m} \underline{v} \cdot \underline{\omega} + \frac{\mu^2}{m^2} \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \right] + \frac{1}{2} M \left[ \underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{\mu^2}{M^2} \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} - 2 \frac{\mu}{M} \underline{v} \cdot \underline{\omega} \right]$$

$$K = \frac{1}{2} m \underline{v} \cdot \underline{v} + \cancel{\mu \underline{v} \cdot \underline{\omega}} + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{m} \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2} M \underline{v} \cdot \underline{v} + \cancel{\mu \underline{v} \cdot \underline{\omega}} + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{M} \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

$$K = \frac{1}{2} (m + M) \underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mu^2 \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} (m + M) \underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right) \mu^2 \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} (m + M) \underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2} \mu \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \quad \text{(قبل التصادم)}$$

وبالمثل بعد التصادم: - فستنتج أن

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = \underline{v} \cdot \underline{n} - \left( \frac{\mu e}{m} \right) \underline{\omega} \cdot \underline{n}$$



$$\underline{v}' \cdot \underline{n} = \underline{q} \cdot \underline{n} + \left(\frac{\mu}{M}\right) \underline{u}' \cdot \underline{n}$$

من سرعة مركز الكتل

وبالمثل نفس الخطوات نستنتج أن

$$k' = \frac{1}{2} (m + M) \underline{q}' \cdot \underline{q}' + \frac{\mu}{2} \underline{u}' \cdot \underline{u}'$$

$$\Rightarrow \underline{q}' = \underline{q}$$

$$\therefore k_{\text{net}} = k - k'$$

$$= \frac{\mu}{2} ( (\underline{u} \cdot \underline{n}) - (\underline{u}' \cdot \underline{n}) )^2$$

$$k_{\text{net}} = \frac{\mu}{2} ( (\underline{u} \cdot \underline{n})^2 - (\underline{u}' \cdot \underline{n})^2 )$$

$$= \frac{\mu}{2} ( -e^2 (\underline{u} \cdot \underline{n})^2 + (\underline{u} \cdot \underline{n})^2 )$$

$$= \frac{\mu}{2} (\underline{u} \cdot \underline{n})^2 (1 - e^2)$$

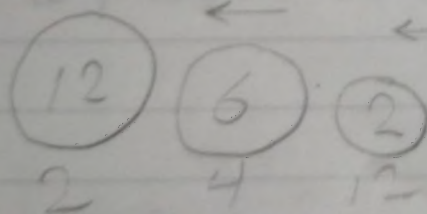
$$1 - e^2 > 0$$

حيث

$$\therefore k - k' > 0 \Rightarrow k > k'$$

التغير في طاقة الحركة قبل التصادم أكبر من التغير في طاقة الحركة بعد التصادم

فإذا ثلاث كرات 2، 6، 12 باوند متحركات بسرعات الابتدائية 2، 4، 12 على الترتيب في خط مستقيم فإذا كان  $e = 1$  أثبت أن الكرتان الأوليتان تتسكنان نتيجة التصادم



الكرتان 6، 2

سرعة الكرة 2 أكبر من الكرة 6 فتصطدم الكرة 2 بـ 6 كمية الحركة قبل تصادم الكرة 6 بـ 2 تساوي كمية الحركة بعد التصادم

$$6 \times 4 + 2 \times 12 = 6U + 2U'$$

$$6U + 2U' = 64$$



$$3\underline{v} + \underline{v}' = 24 \quad \text{--- ①}$$

∴ الحركة أفقية فإنه لا توجد مركبة في اتجاه المماس

$$\underline{u}' = -e\underline{u} \Rightarrow \underline{u}' - \underline{u} = -e(12-4)$$

$$\underline{v}' - \underline{v} = -8 \Rightarrow \text{②}$$

∴ المعادلتين ينتج أن

$$\underline{v} = 8, \underline{u}' = 0$$

∴ الكتل 2 تسكن نتيجة التصادم

$$\begin{array}{c} \textcircled{12} \quad \textcircled{6} \\ 2 \quad 8 \end{array}$$

الكرتان الـ 12 6 6

∴ الكرة 6 اكتسبت سرعة نتيجة التصادم فأصبحت سرعتها 8 والكرة 12 سرعتها 2

∴ الكرة 6 تلحق الكرة 12 وتصطدم بها

كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

$$\therefore 12 \times 2 + 6 \times 8 = 12 \times u + 6 \times u'$$

$$\therefore 12u + 6u' = 72$$

$$2u + u' = 12 \quad \text{--- ①}$$

∴ الحركة أفقية فإنه لا توجد مركبة في اتجاه المماس

$$\therefore \underline{u}' = -e\underline{u}$$

$$\therefore \underline{u}' - \underline{u} = -1(8-2) \Rightarrow \underline{u}' - \underline{u} = -6 \quad \text{--- ②}$$

∴ المعادلتين ينتج أن

$$u = 6$$

$$u' = 0$$

∴ تسكن الكتل 6 نتيجة التصادم

